

1. Двинин С.А. Пространственные характеристики положительного столба разряда постоянного тока¹

Целью данной задачи является знакомство с различными моделями положительного столба (ПС) газового разряда и пределами их применимости. Построение модели должно дать возможность рассчитать параметры плазмы (распределение плотности и температуры электронов) в разряде при заданных внешних условиях (геометрии и размерах разрядной трубки, роде газа) и токе разряда, напряженность поля в плазме, а также параметры частиц, бомбардирующих стенки разрядной трубки. Рассматриваемые модели плазмы являются основой при построении конструкций источников света (лампы дневного света), газовых лазеров (He–Ne лазер) технологических устройств для микроэлектроники, осуществляющих плазмохимическое травление поверхности или нанесение тонких пленок.

Первая модель ПС была создана Шоттки в 1924 году [1]. Он рассмотрел разряд в условиях, когда поперечный размер разряда R много больше длины свободного пробега ионов $\lambda \ll R$. В дальнейшем в 1929 г. Ленгмюр и Тонкс [2] разработали модель ПС в режиме свободного пробега ионов $\lambda \gg R$. Они же обнаружили, что в граничной области положительного столба формируется слой пространственного заряда. Образующийся благодаря существованию слоя потенциальный барьер отражает большую часть электронов,двигающихся к стенке из положительного столба, и в свою очередь ускоряет ионы,двигающиеся к стенке. Поэтому для описания воздействия положительного столба на стенку установки принципиально необходимо рассматривать процессы в слое пространственного заряда.

Модели Шоттки и Ленгмюра–Тонкса не описывают все процессы в газовом разряде (в особенности при разряде в молекулярных и электроотрицательных газах) и не охватывают всю область параметров положительного столба (в частности область), однако являются основой для построения более сложных моделей. Кроме разряда постоянного тока аналогичные модели могут быть построены для ВЧ и СВЧ разрядов. В период после 1930 года эти модели неоднократно уточнялись другими авторами. Некоторые из этих моделей представляют собой предмет изучения данной задачи.

¹ © С.А. Двинин, 2012

© Физический факультет МГУ, 2012

В разряде постоянного тока выделяют катодное падение потенциала, анодное падение потенциала и положительный столб [3, 4]. Положительный столб (ПС) газового разряда замыкает цепь тока между катодным и анодным слоями. Потери частиц в ПС связаны не с продольным дрейфом заряженных частиц в поле, как в катодной области (модель Таунсенда [4]), а с их уходом на стенку в поперечном направлении. Этот уход должен быть компенсирован ионизацией, для поддержания которой в ПС существует продольное электрическое поле, которое греет электроны. Так как диффузионные потери частиц гораздо меньше, чем потери, связанные с дрейфом в катодной области, поле в ПС существенно ниже, чем в катодном слое. Поскольку плазма газового разряда широко используется в современной микроэлектронной технологии, источниках спектральных линий, газоразрядных лазерах, разработчикам необходимо теоретическое описание процессов в ПС, так как в большинстве случаев именно ПС является рабочим элементом вне зависимости от способа создания плазмы (тлеющий разряд, дуговой разряд низкого давления, ВЧ и СВЧ разряды, плазменно-пучковый разряд). С развитием теоретического описания и экспериментальных исследований ПС вплоть до 1971 года можно ознакомиться в [3].

I. Модель плазменного столба в диффузионном режиме (теория Шоттки)

Модель Шоттки была первой моделью положительного столба. Она была предложена им в 1924 году. [1]. Основные предположения теории заключается в следующем.

- {1}. Положительный столб считаем стационарным во времени и однородным вдоль оси Z .
- {2}. Положительный столб считаем состоящим из электронов, нейтралов и однозарядных ионов одного сорта.
- {3}. Распределения электронов и нейтралов по энергиям считаем Максвелловскими с температурами T_e , T_n , которые считаем не зависящими от координаты.
- {4}. Основным механизмом ионизации считаем прямую ионизацию электронным ударом из основного состояния, а механизмом рекомбинации – рекомбинацию на стенках.
- {5}. Основной механизм нагрева электронов – нагрев продольным элек-

трическим полем

{6}. Длина свободного пробега ионов много меньше размеров системы, а плазма квазинейтральна, поэтому движение электронов и ионов в пространстве удовлетворяет уравнению амбиполярной диффузии.

В соответствии со сделанными предположениями плазма ПС может быть описана уравнением баланса частиц ($r=0$ в плоской геометрии, $r=1$ в цилиндрической, $r=2$ в сферической)

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{1}{x^r} \frac{\partial}{\partial x} x^r D_a \frac{\partial n}{\partial x} = v_i(T_e)n, \quad (1)$$

уравнением баланса энергий

$$e\mu_e \bar{E}^2 \int_s x^r n(x) dx = \int_s x^r n(x) w_1(T_e) dx = \\ = \int_s x^r n(x) dx \left\{ \frac{2m}{M} v_{en} \frac{3}{2} k(T_e - T_g) + \sum_s v_s(T_e) \varepsilon_s + v_i(T_e) \left(\varepsilon_i + \frac{3}{2} kT_e + \varepsilon_{ist} \right) \right\}. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) введены обозначения t, x – время и координата, n, T_e – плотность и температура электронов, $D_a = \mu_e \mu_i (T_e + T_i) / (\mu_e + \mu_i)$ – коэффициент амбиполярной диффузии, $\mu_e = e/m v_{en}$, $\mu_i = e/M v_{in}$ – электронная и ионная подвижности, v_{en}, v_{in}, v_i, v_s – частоты столкновений электрон–нейтрал, ион–нейтрал и частоты ионизации, e – элементарный электрический заряд, m, M – массы электрона и иона, E – продольное электрическое поле в плазме, ε_s, v_s – пороговая энергия возбуждения атома из основного состояния и частота возбуждения на уровень s , ε_i – пороговая энергия ионизации, k – постоянная Больцмана, ε_{ist} – энергия уносимая ионом на стенку. Левая часть уравнения (2) содержит энергию передаваемую каждому электрону продольным полем, слагаемые в правой – нагрев газа в упругих столкновениях этим электроном (первое), затраты энергии электрона на возбуждение нейтралов (второе), на ионизацию газа (первый член в круглых скобках), тепловую энергию, выносимую электроном на стенки (второй член), энергию, которая идет на ускорение ионов (последний член, содержащий ε_{ist}). Иногда правую часть уравнения (2) записывают в виде

$$w_1(T_e) = \kappa(T_e) v_{en} \frac{3}{2} k(T_e - T_g), \quad (3)$$

где κ – средняя доля энергии, теряемая электроном в столкновениях. Пример зависимости κ от температуры для гелия приведен на рис. 1 [3]. Из рисунка следует, что при слабом нагреве электронов преобладают упругие, а при сильном – неупругие потери.

Граничное условие для уравнения баланса частиц (1) Шоттки предложил

записать в виде

$$n = 0. \quad (4)$$

Частоты ионизации и возбуждения рассчитываются по стандартным формулам

$$\nu_{i,q} = 4\pi N \int_0^{\infty} V \sigma_{i,q}(V) f_e(V) V^2 dV, \quad (5)$$

где $\sigma_{i,q}$ – сечение ионизации или возбуждения, $f_e(V)$ – функция распределения электронов по энергиям, которая предполагается изотропной. Энергия, переносимая ионами на стенку, в рамках модели Шоттки рассчитана быть не может, так как движение последних в приграничной области теорией не описывается.

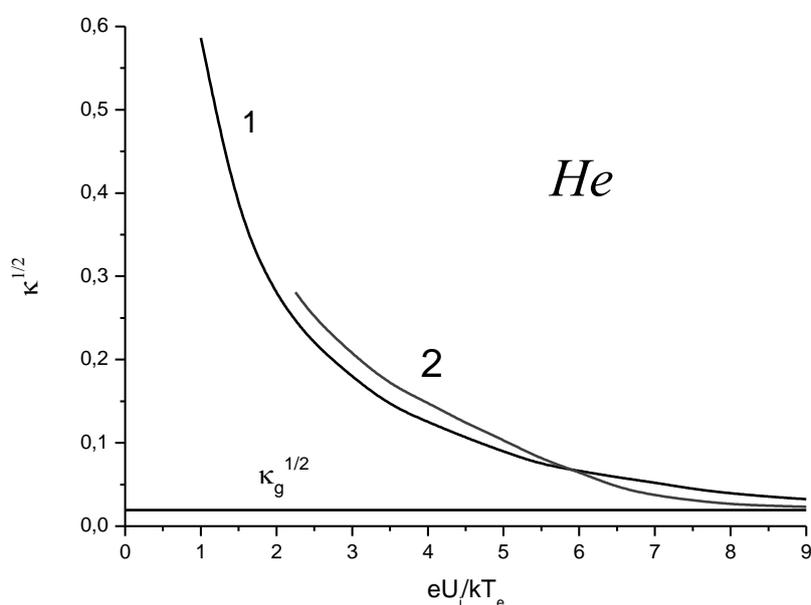


Рис. 1. Зависимость средней доли энергии, теряемой электронами в столкновениях в гелии от их температуры (см. [7]).

Для расчета частоты ионизации обычно используется линейная аппроксимация сечения

$$\sigma_i = a(\varepsilon - \varepsilon_i), \quad (6)$$

а для сечения возбуждения – аппроксимация Фабриканта

$$\sigma_q = \sigma_{ms} \frac{\varepsilon - \varepsilon_s}{\varepsilon_{ms} - \varepsilon_s} \exp\left(\frac{\varepsilon_{ms} - \varepsilon}{\varepsilon_{ms} - \varepsilon_s}\right), \quad (7)$$

где ε_{ms} – энергия, при которой сечение максимально и равно σ_{ms} , ε_s – порог сечения. Эти аппроксимации неплохо описывают ход сечения вблизи по-

рога, а также позволяют аналитически рассчитать интеграл (5):

$$v_i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} a N \left(\frac{2kT_e}{e} \right)^{3/2} \frac{e^{1/2}}{m^{1/2}} \left(1 + \frac{\varepsilon_i}{2kT_e} \right) \exp \left(-\frac{\varepsilon_i}{kT_e} \right), \quad (8)$$

$$v_s = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sigma_{ms} N \left(\frac{kT_e}{m} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\varepsilon_s}{2kT_e} \left(1 + \frac{kT_e}{\varepsilon_{ms} - \varepsilon_s} \right) \right) \exp \left(1 - \frac{\varepsilon_s}{kT_e} \right) \left(1 + \frac{kT_e}{\varepsilon_{ms} - \varepsilon_s} \right)^{-3}. \quad (9)$$

Далее мы вслед за Шоттки ограничимся цилиндрическим положительным столбом. Решение нестационарного уравнения (1) стандартно для уравнений математической физики [5] и приводит к результату

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} J_m \left(\tilde{\mu}_{mk} \frac{r}{R} \right) \left(n_{mk}^{(1)} \sin(m\varphi) + n_{mk}^{(2)} \cos(m\varphi) \right) \exp \left(\left(v_i - \frac{\tilde{\mu}_{mk}^2 D_a}{R^2} \right) t \right). \quad (10)$$

Здесь $\tilde{\mu}_{mk}$ – k -тый корень функции Бесселя порядка m . Коэффициенты $n_{mk}^{(1)}$ и $n_{mk}^{(2)}$ определяются начальным распределением плотности [5].

$$\begin{pmatrix} n_{mk}^{(1)} \\ n_{mk}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{2}{\pi R^2 J_m'^2(\tilde{\mu}_{mk})} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi n(0, r, \varphi) J_m \left(\tilde{\mu}_{mk} \frac{r}{R} \right) \begin{pmatrix} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Из решения (5.5) следует, что при $t \rightarrow \infty$ остается только симметричная мода

$$n = n_0 J_0 \left(\tilde{\mu}_{01} \frac{r}{R} \right) \exp \left(\left(v_i - \frac{\tilde{\mu}_{01}^2 D_a}{R^2} \right) t \right), \quad (12)$$

($\tilde{\mu}_{01} = 2,405$). В стационарном режиме частота ионизации имеет строго определенное значение

$$v_i = D_a / (R/2,405)^2. \quad (13)$$

Для возможности описания разряда в произвольной геометрии часто вводят понятие диффузионной длины Λ , записывая соотношение (13) в виде

$$v_i = D_a / \Lambda^2. \quad (14)$$

Уравнение (14) с учетом $T_e \gg T_i$ и $\mu_e \gg \mu_i$ позволяет оценить зависимость частоты ионизации от соотношения между длиной свободного пробега иона и размером плазмы

$$v_i \sim \frac{V_s}{L} \left(\frac{\lambda_i}{L} \right), \quad (15)$$

где $V_s = \sqrt{kT_e/M}$. В соответствии с уравнением (15) частота ионизации определяет температуру электронов в плазме. Зная температуру с помощью уравнения баланса энергий (16) можно рассчитать поле, необходимое для поддержания стационарного разряда.

К сожалению, нулевые граничные условия на стенке приводят к бесконечным значениям скорости течения ионов на границе (хотя поток

ионов рассчитывается правильно) и потенциала стенки, а именно эти величины важны для оценки воздействия плазмы на ограничивающую ее стенку.

II. Модель Ленгмюра и Тонкса (уравнение плазмы слоя).

В 1929 году Ленгмюр и Тонкс построили модель плазменного столба в режиме свободного падения ионов на стенки [2]. Основные предположения теории Ленгмюра и Тонкса совпадают с предположениями модели Шоттки за исключением {6}. Заменяющие его предположения могут быть сформулированы так.

{6}. Ионы достигают стенок в режиме свободного падения ($L \ll \lambda$). Потенциал в плазме является монотонной функцией координаты.

{7}. Распределение потенциала в плазме предполагаем монотонным.

В качестве основы для интегро-дифференциального уравнения Ленгмюр и Тонкс использовали уравнение Пуассона

$$\frac{1}{x^r} \frac{d}{dr} x^r \frac{d\varphi}{dx} = 4\pi e \{n_e(x) - n_i(x)\}, \quad (1)$$

где n_i – плотность ионов, n_e – плотность электронов, $e > 0$ – элементарный электрический заряд, φ – потенциал электрического поля, $r=0,1,2$ для разряда в плоской, цилиндрической и сферической геометрии.

Плотность электронов $n_e(x)$ предполагалась находящейся в равновесии с электрическим полем, что означает пренебрежение инерцией электронов и позволяет рассчитать ее с помощью уравнения:

$$n_e = n_0 \exp(e\varphi/kT_e), \quad (2)$$

где n_0 – плотность электронов, соответствующая нулевому потенциалу.

Движение каждого отдельного иона между столкновениями удовлетворяют уравнениям Ньютона. Ионы, родившиеся в окрестности dx' точки x' , создают в окрестности dx точки x поток ионов

$$dn_i(x, x') x' V_x(x, x') = x'' v_i n_e(x') dx' \quad (3)$$

(V_x – скорость ионов в точке x , $v_i(x')$ – частота ионизации нейтралов электронным ударом в точке x'). Так как ионы пролетают расстояние от x до x' без столкновений, то

$$V_x = \sqrt{(\varphi(x') - \varphi(x)) \times (2e/M)}, \quad (4)$$

$$n_i(x) = v_i \frac{1}{x^r} \int_0^x \frac{n_e(x') x'^r dx'}{\sqrt{(2e/M)(\varphi(x') - \varphi(x))}}. \quad (5)$$

Подставляя выражения для плотностей электронов (2) и ионов (5) в урав-

нение Пуассона, получим искомое интегральное уравнение для потенциала

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^r} \frac{d}{dr} x^r \frac{d\varphi}{dx} = \\ & = 4\pi en_0 \left\{ \exp\left(\frac{e\varphi(x)}{kT_e}\right) - \frac{v_i}{x^r} \int_0^x \frac{x'' dx'}{\sqrt{(2e/M)(\varphi(x') - \varphi(x))}} \exp\left(\frac{e\varphi(x')}{kT_e}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

которое Ленгмюр и Тонкс назвали уравнением плазмы и слоя. Так как потенциал задан с точностью до произвольной постоянной, можно положить $\varphi(0)=0$. Требование симметрии плазменного столба относительно начала координат приводит к граничному условию

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (7)$$

Второе граничное условие в точке контакта плазмы с твердым телом означает равенство токов электронов и ионов. Ионный ток на стенку проще всего рассчитать, проинтегрировав уравнение непрерывности для ионов

$$j(x) = \frac{n_0 e}{x^r} \int_0^x v_i \exp\left(\frac{e\varphi(x')}{kT_e}\right) x'' dx'. \quad (8)$$

Для расчета электронного тока на стенку можно использовать уравнение стандартной теории тока на зонд [5]

$$j_e = -\frac{n_e e V_t}{4} = -\frac{1}{4} n_0 e V_{te} \exp\left(\frac{e\varphi(x')}{kT_e}\right), \quad (9)$$

где $V_{te} = \sqrt{8kT_e/\pi m}$ – наивероятнейшая скорость электронов. Влияние отклонения функции распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ) от Максвелловской в области больших энергий, которое может существенно повлиять на величину электронного тока, рассмотрено в работе [21] и может быть учтено введением коэффициента γ (кинетического коэффициента отражения) $j_e = j_0 \times \gamma$. Таким образом, граничное условие на стенке для уравнения (16) имеет вид:

$$\left. \left\{ \int_0^x v_i \exp\left(\frac{e\varphi(x')}{kT_e}\right) x'' dx' - \gamma \frac{1}{4} V_{te} x^r \exp\left(\frac{e\varphi(x)}{kT_e}\right) \right\} \right|_{x=L} = 0. \quad (10)$$

Уравнение плазмы и слоя позволяет рассчитать пространственное распределение параметров плазмы как в области параметров плазмы как в области квазинейтральности, так и в области слоя пространственного заряда на ее границе, то есть в отличие от модели Шоттки учитывают отклонения от квазинейтральности.

В квазинейтральном приближении в уравнении плазмы и слоя (6) можно пренебречь производной по координате в правой части и в этом ви-

де оно носит название уравнения плазмы

$$4\pi en_0 \left\{ \exp\left(\frac{e\varphi(x)}{kT_e}\right) - \frac{v_i}{x^r} \int_0^x \frac{x'^r dx'}{\sqrt{(2e/M)(\varphi(x') - \varphi(x))}} \exp\left(\frac{e\varphi(x')}{kT_e}\right) \right\} = 0. \quad (11)$$

Ленгмюр и Тонкс получили решение уравнения (11) в виде ряда для цилиндрического случая:

$$r = \frac{\sqrt{2}V_s}{v_i} \sqrt{\frac{e\varphi}{kT_e}} \left(1 - 0.2 \frac{e\varphi}{kT_e} - 0.026061 \left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right)^2 - 0.0064894 \left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right)^3 - \dots \right). \quad (12)$$

При $e\varphi/kT_e = 1.155$ производная $dr/d\varphi$ обращается в ∞ . При этом нельзя пренебречь производной по координате в (6), что означает переход от плазмы к слою пространственного заряда. При этом $r = 0.7722\sqrt{2}V_s/v_i$. Частота ионизации в уравнении плазмы и слоя, так же как и в уравнении диффузии, является собственным значением и определяется родом газа, геометрией системы и соотношением размера плазменного столба и радиуса Дебая. Зная частоту ионизации можно с помощью формулы (5) рассчитать Температуру электронов, а с помощью уравнения баланса энергии (1) – электрическое поле, необходимое для поддержания стационарного разряда. Пространственные производные в левой части уравнения (15) играют существенную роль в области слоя пространственного заряда. В квазинейтральной части ими можно пренебречь.

III. Гидродинамические модели положительного столба

Ленгмюр и Тонкс показали в своей модели, что положительный столб содержит две области – область квазинейтральной плазмы и область слоя пространственного заряда, где плотность электронов не равна плотности ионов. Поэтому модель Шоттки также должна быть исправлена для учета этого явления. Другими дефектами теории Шоттки являются

1. Некорректные граничные условия на стенке.
2. Отсутствие учета подвижности ионов от напряженности амбиполярного поля.
3. Отсутствие учета инерции ионов, которая существенна, когда скорость ионов приближается к скорости ионного звука.

Первым некорректные граничные условия попытался исправить Грановский [7], который предложил заменить условие (4) соотношением

$$n(R) = -\lambda_i \frac{dn}{dx}. \quad (1)$$

Условие (1) позволяет учесть влияние конечности длины свободного пробега на частоту ионизации в положительном столбе и избавиться от бесконечных скорости ионов и потенциала. К сожалению, предложенное Грановским граничное условие фактически поставлено на расстоянии длины свободного пробега иона от границы плазмы. Оно не учитывает процессы внутри кнудсеновского слоя, в частности, формирования на границе слоя пространственного заряда, размер которого может быть гораздо меньше длины свободного пробега иона, ускоряющего ионы значительно сильнее, чем это предсказывает формула (1).

Учет инерции ионов впервые осуществил Перссон [8], исходящий из уравнений гидродинамики в предположении равенства плотностей электронов и ионов

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{x^r} \frac{\partial}{\partial x} (x^r n V) = \nu_i n, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = -\frac{V_s^2}{n} \frac{\partial n}{\partial x} - \nu_{in} (V) V. \quad (3)$$

Таким образом, система уравнений (2) и (3) способна описать как инерцию ионов (слагаемое $V(\partial V/\partial x)$), так и аномальный дрейф. В стационарном режиме уравнения (3) сводятся к одному уравнению относительно скорости течения плазмы

$$(V_s^2 - V^2) \frac{dV}{dx} = \left(\nu_{in} V^2 + \nu_i V_s^2 - \frac{r V V_s^2}{x} \right). \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет особую точку $V=V_s$. Решения при $V < V_s$ и $V > V_s$ не связаны между собой. Таким образом, скорость течения формирующейся плазмы не может превышать скорость звука. Граничные условия для уравнения (4) имеют вид

$$V(0) = 0, \quad V(L) = V_s. \quad (5)$$

Собственным значением краевой задачи, как и раньше, является частота ионизации ν_i . Знание профиля распределения скорости ионов который может быть получен интегрированием (4)

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\nu_{in} V^2 + \nu_i V_s^2 - r V V_s^2 / x}{(V_s^2 - V^2)} \quad (6)$$

и позволяет рассчитать пространственное распределение плотности заряженных частиц (n_0 – плотность плазмы в центре положительного столба)

$$n(x) = n_0 \exp \left(- \int_0^x dx \frac{(\nu_i + \nu_{in} - rV(x)/x)V(x)}{(V_s^2 - V^2(x))} \right) = n_0 \exp \left(- \int_0^V dV \frac{(\nu_i + \nu_{in} - rV/x(V))V}{(\nu_{in} V^2 + \nu_i V_s^2 - r V V_s^2 / x(V))} \right) \quad (7)$$

и потенциала

$$\varphi(x) = \frac{kT_e}{e} \ln\left(\frac{n(x)}{n_0}\right) = -\frac{kT_e}{e} \int_0^V dV \frac{(v_i + v_{in} - rV/x(V))V}{(v_{in}V^2 + v_iV_s^2 - rVV_s^2/x(V))}. \quad (8)$$

Следует отметить, что нельзя однозначно утверждать, что приближение, учитывающее инерцию ионов дает, более точный результат, чем приближение Шоттки, так как в учет инерции ионов без учета отклонений от квазинейтральности приводит к обращению на границе в бесконечность электрического поля. Поэтому сопряжение уравнений гидродинамики и уравнений для бесстолкновительного слоя пространственного заряда в данном приближении затруднено.

IV. Учет слоев пространственного заряда в модели Шоттки

Гидродинамические модели плазмы не позволяют рассмотреть процессы в слое пространственного заряда, так как размер последнего, порядка нескольких радиусов Дебая и может быть много меньше длины свободного пробега иона. Уравнение, описывающее распределение потенциала в слое пространственного заряда имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi en_0 \left[\exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) - \frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + 2e\varphi/M}} \right]. \quad (1)$$

Здесь V_0 – скорость ионов на влете в слой пространственного заряда. Граничные условия для СПЗ имеют вид

$$\varphi(0) = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = E_0, \quad \left. \left\{ V_0 - \gamma \frac{1}{4} V_i \exp\left(-\frac{e\varphi(x)}{kT_e}\right) \right\} \right|_{x=L} = 0. \quad (2)$$

Однократное интегрирование уравнения (1) понижает его порядок

$$x = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{2 \left(E_0 - 4\pi m_0 kT_e \left[1 - \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) - \frac{MV_0^2}{kT_e} \left(\sqrt{1 + \frac{2e\varphi}{MV_0^2}} - 1 \right) \right] \right)}}. \quad (3)$$

Стандартное граничное условие считает плазму квазинейтральной, т.е. что поле на границе плазмы и слоя равно 0. При этом подкоренное выражение в знаменателе положительно, если скорость ионов на влете в слой превышает ионнозвуковую скорость V_s . Граничное условие (2) позволяет оценить падение напряжения на слое

$$\varphi = \frac{kT_e}{e} \ln\left(\frac{\gamma V_i}{4V_0}\right) \approx \frac{kT_e}{2e} \ln\left(\frac{M}{m}\right). \quad (4)$$

Однако численное решение (3) с граничным условием $E_0 = 0$ невозможно,

так как интеграл расходится при $\varphi = 0$.

Итак, скорость движения ионов в квазинейтральной плазме не может превышать ионно-звуковую скорость, а скорость ионов на входе в слой не может быть ниже ионно-звуковой. Это означает, что при этом значении скорости можно рассчитать плотность электронов, потенциал и напряженность электрического поля в плазме, решая уравнения диффузии с граничным условием $V=V_s$, либо решая уравнения модели Перссона (3.2)– (3.4) и использовать их в качестве начального условия для уравнения плазмы и слоя. Такой подсчет позволяет рассчитать профиль параметров плазмы во всем ее объеме, включая слой пространственного заряда и энергию ионов, которые ускоряются в поле пространственного заряда и бомбардируют подложку, что важно для практических приложений разряда. Таким образом, достижение ионами ионно-звуковой скорости рассматривается как критерий формирования слоя пространственного заряда на границе плазмы. Это условие называется критерием Бома [9].

V. Уравнение плазмы и слоя, учитывающее столкновения ионов

Процедура сопряжения уравнений гидродинамики с уравнением для бесстолкновительного слоя пространственного заряда позволяет получить качественно зависимость падения потенциала на слое, и толщины слоя, оценить энергию ионов, бомбардирующих плазму. Но функция распределения ионов по энергиям при этом рассчитана быть не может (так как ФРИЭ на входе в слой считается моноэнергетичной). Однако можно получить уравнение плазмы и слоя, учитывающее перезарядку ионов, как в плазме, так и в слое пространственного заряда [10]. Первые пять предположений, используемые при выводе уравнения совпадают с используемыми как в модели Шоттки, так и в модели Ленгмюра–Тонкса. Два дополнительных предположения следующие.

{6}. Все столкновения ионов с нейтралами сопровождаются перезарядкой, пренебрегая упругими столкновениями ионов. Энергию ионов, образовавшихся в результате перезарядки, будем считать нулевой. Это является наиболее жестким ограничением, так как сечение перезарядки значительно превышает сечение упругих столкновений лишь при столкновении атома с собственным ионом. Тем самым применение данной модели к разрядам в смесях газов нуждается в дополнительном анализе, однако, и в этом случае можно ожидать, что она даст более близкое к эксперименту

решение, чем гидродинамика.

{7}. Распределение потенциала в плазме предполагается монотонным.

Уравнение баланса плазмы и слоя с учетом столкновений ионов имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi en_0 \left\{ \exp\left(\frac{e\varphi(x)}{kT_e}\right) - v_i \int_0^x dx' \frac{\exp(-(x-x')/\lambda_i)}{\sqrt{(2e/M)(\varphi(x')-\varphi(x))}} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \exp\left(\frac{e\varphi(x')}{kT_e}\right) + \frac{1}{\lambda_i} \int_0^{x'} dx'' \exp\left(\frac{e\varphi(x'')}{kT_e}\right) \right\} \right\} \quad (1)$$

Граничные условия для уравнения плазмы и слоя с учетом столкновений ионов аналогичны таковым для уравнения Ленгмюра и Тонкса.

Уравнение (1), которое мы будем в дальнейшем называть столкновительным уравнением плазмы и слоя, описывает как диффузионный режим [1], так и режим свободного пробега ионов [2] в газовом разряде. Его собственным значением является величина $(v_i L / V_S)$. Условие {7} необходимо, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным. При $\lambda_i \rightarrow \infty$ (1.8) переходит в известное уравнение плазмы и слоя [2, 18], а при $\lambda_i \rightarrow 0$ интегралы в правой части вычисляются, приводя к гидродинамическому приближению, также исследованному Шоттки [1] и Ленгмюром и Тонксом [2]. Отметим, что ионы в данном уравнении рождаются с нулевой скоростью, а длина свободного пробега иона не зависящей от энергии. Поэтому при больших длинах свободного пробега ионы движутся в режиме аномального дрейфа, и амбиполярная диффузия описывается уравнением (5.6.8) в приближении аномального дрейфа ионов. Оценки показывают, что это предположение выполняется, если полуширина разряда меньше тридцати длин свободного пробега ионов. Если это условие не выполняется, остается использовать диффузионное приближение и описывать слой пространственного заряда отдельно от плазмы.

VI. Условия подобия в газовом разряде

Уравнение, определяющие характеристики разряда в различных условиях (1.1), (2.6), (3.6), (5.1) свидетельствуют, что при увеличении давления газа в K раз значение температуры электронов не изменится, если размер разрядной области одновременно уменьшить в K раз. При этом в то же количество раз увеличивается и все характерные частоты плазмы

(ионизации, столкновений возбуждения и т.п. и поле в плазме). Данное свойство дает возможность использовать экспериментальные характеристики разряда, полученные при одном давлении, для определения их при другом давлении газа.

VII. Инструкция по выполнению задачи

I. Цель задачи:

1. Изучение различных моделей газового разряда, сравнение результатов, определение области применимости каждой модели.

II. Порядок выполнения задачи.

1. Для изучения модели разряда.

- Выбрать рабочий газ (один из инертных газов).
- Выбрать геометрию и размер разрядной трубки (цилиндрическую или плоскую).
- Выбрать плотность электронов в разряде.

Упражнение 1. Изучение диффузионной модели газового разряда

1. Для выбранных в п. II.1 газа и размера и геометрии разрядной трубки, плотности электронов рассчитать в модели Шоттки зависимость температуры электронов, частоты ионизации, времени жизни электрона, мощности поля, теряемой в 1 см^2 разряда и электрического поля в плазме от давления газа в диапазоне $p \cdot R = 0.01 - 100 \text{ Тор} \cdot \text{см}$.

Упражнение 2. Изучение модели Ленгмюра–Тонкса газового разряда

1. Для выбранных в п. II.1 газа и размера и геометрии разрядной трубки, плотности электронов рассчитать в модели Ленгмюра–Тонкса зависимость температуры электронов, частоты ионизации, времени жизни электрона, мощности поля, теряемой в 1 см^2 разряда и электрического поля в плазме от давления газа в диапазоне $p \cdot R = 0.00001 - 1 \text{ Тор} \cdot \text{см}$.

Отчетность по упражнениям 1 и 2:

Графики зависимости температуры электронов, частоты ионизации, времени жизни электрона, мощности поля, теряемой в 1 см^2 разряда и электрического поля в плазме от давления газа в диапазоне $p \cdot R = 0.00001 - 100 \text{ Тор} \cdot \text{см}$. Графики пространственных распределений параметров плазмы от координаты при значениях $p \cdot R = 0.01, 0.1, 1 \text{ Тор} \cdot \text{см}$.

По результатам расчета:

Определить минимальное давление, при котором может существовать стационарный разряд. Указать на графиках зависимости параметров плазмы области применимости каждой из моделей.

Упражнение 3. Проверка выполнения законов подобия в газовом разряде.

Для выбранного значения pR и выбранной модели разряда провести расчет характеристик разряда при изменении параметров p и R .

Отчетность:

Графики зависимости температуры электронов, частоты ионизации, времени жизни электрона, мощности ВЧ поля, теряемой в 1 см^2 разряда и электрического поля в плазме от давления газа в диапазоне для заданного значения pR .

Упражнение 4. Изучение зависимость характеристик газового разряда от рода газа.

Для выбранного значения pR и выбранной модели разряда провести расчет характеристик разряда для всех инертных газов.

Отчетность:

На графики, полученный в упражнениях 1 и 2 нанести точки, соответствующие другим инертным газам.

Упражнение 5. Зависимость характеристик газового разряда от геометрии положительного столба.

Для выбранного значения pR и выбранной модели разряда провести расчет характеристик разряда для всех инертных газов.

Отчетность:

На график, полученный в упражнении I нанести точки, соответствующие другим геометриям положительного столба разряда.

Упражнение 6. Влияние неквазинейтральности на характеристики разряда.

Для выбранного значения pR , соответствующего области применимости моделям, использующим приближение плазмы и слоя провести расчет характеристик разряда при изменении плотности электронов от 10^6 до 10^{14} см^{-3} . Сравнить параметры разряда. Использовать модель уравнения плазмы

и слоя с учетом перезарядки.

Отчетность:

Графики зависимости температуры электронов, частоты ионизации, времени жизни электрона, радиуса Дебая, мощности электрического поля, теряемой в 1 см^3 разряда и электрического поля в плазме от плотности электронов для заданного значения pR .

Приложение I. Амбиполярная диффузия

Кроме дрейфа в электрическом поле неоднородность пространственного распределения плотности заряженных частиц приводит к их диффузии в пространстве. Получить приближенные выражения для коэффициентов диффузии можно из гидродинамических уравнений при учете собственного давления

$$m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\frac{1}{n} \nabla n k T + q \mathbf{E} - \nu m \mathbf{V}. \quad (\text{П.1})$$

Стационарное решение (П.1) имеет вид

$$n \mathbf{V} = \frac{nq}{m \nu} \mathbf{E} - \frac{kT}{m \nu} \nabla n = \mu \mathbf{E} - D \nabla n. \quad (\text{П.2})$$

В плазме (то есть в проводящей среде, размер которой много больше радиуса Дебая $r_D = (kT/4\pi n e^2)^{1/2}$) электроны и ионы не могут двигаться (дрейфовать и диффундировать) независимо друг от друга, вследствие сильного электростатического взаимодействия. Запишем уравнения двухжидкостной гидродинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \mathbf{V}_e) &= 0, \\ m \frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} &= -\frac{1}{n_e} \nabla n_e k T_e - e \mathbf{E} - \nu_{en} m \mathbf{V}_e, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \mathbf{V}_i) &= 0, \\ M \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} &= -\frac{1}{n_i} \nabla n_i k T_i + e \mathbf{E} - \nu_{in} M \mathbf{V}_i \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

и уравнение Пуассона

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e(n_i - n_e). \quad (\text{П.4})$$

Слабовозмущенные решения данной системы вида

$$\begin{pmatrix} \delta n_e \\ V_e \\ \delta n_i \\ V_i \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta n_e \\ V_e \\ \delta n_i \\ V_i \\ E \end{pmatrix} \exp(-i\Omega t + ikx) \quad (\text{П.5})$$

приводят к дисперсионным уравнениям

$$\begin{aligned} (-i\Omega(-i\Omega + \nu_{en}) + k^2 V_{Te}^2 + \omega_{Pe}^2) \delta n_e - \omega_{Pe}^2 \delta n_i &= 0, \\ (-i\Omega(-i\Omega + \nu_{in}) + k^2 V_{Ti}^2 + \omega_{Pi}^2) \delta n_i - \omega_{Pe}^2 \delta n_e &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

При $k \rightarrow 0$ из этой системы следует

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \left((\omega_{Pe}^2 + \omega_{Pi}^2) + k^2 V_{Te}^2 \right)^{1/2} - i \nu_{en} / \left((\omega_{Pe}^2 + \omega_{Pi}^2) + k^2 V_{Te}^2 \right)^{1/2}, \\ \Omega^{(2)} &= k^2 \frac{(T_e + T_i)}{M \nu_{in}} (1 - k^2 r_{De}^2). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Первое соотношение описывает процесс релаксации пространственного заряда (Ленгмюровские колебания, поскольку процесс является быстрым), а второе – амбиполярную диффузию (при $\nu_{in}=0$ оно описывало бы ионно-звуковые волны). Термин амбиполярная диффузия впервые был введен Шоттки в 1924 г. [1]. Соотношение (4.12) соответствует дифференциальному уравнению диффузии (мы пренебрегли слагаемыми порядка k^4 , которые привели бы к появлению пространственных производных четвертого порядка)²

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{V_s^2}{\nu_{in}} \nabla^2 n_i = D_a \nabla^2 n_i. \quad (\text{П.8})$$

Осуществленная нами процедура представляет собой разложение исходных дифференциальных уравнений по малому параметру r_{De}/L и оправдывает используемые обычно при выводе коэффициента амбиполярной диффузии предположения $n_e = n_i$, $\text{div} \mathbf{V}_e = \text{div} \mathbf{V}_i$.

Список литературы

² Стандартный вывод уравнений амбиполярной диффузии заключается в предположении равенства плотностей и токов электронов и ионов и квазистационарности их динамики. В этом случае приравнивание плотностей электрон и ионов и их потоков приводит к результату $\mathbf{E} = \frac{D_e - D_i}{\mu_e + \mu_i} \frac{\nabla n}{n}$,

$$n \mathbf{V} = - \frac{\mu_i D_e - \mu_e D_i}{\mu_e + \mu_i} \nabla n = -D_a \nabla n.$$

- [1]. Schottky W. Physikalische Zeitschrift, 25, 342, 635 (1924).
- [2]. Langmuir I., Tonks L. Phys. Rev. 34, 876, (1929).
- [3]. Грановский В.Л. Электрический ток в газе. Установившийся ток. М.: Наука, 1971, с. 235–291.
- [4]. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1976.
- [5]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, ГРФМЛ, 1972 г.
- [6]. Бакшт Ф.Г., Мойжес Б.Я., Немчинский В.А. ЖТФ, 37, 1967, с. 729.
- [7]. Грановский В.Л. ДАН СССР, 1939, т. 23, с.880.
- [8]. Persson K.V. Inertia controlled ambipolar diffusion. Phys. Fluids, 1962, v.5, p. 1625.
- [9]. Bohm D. In.: The Characteristics of Electrical Discharges in magnetic fields. Editors Guthrie A., Wakerling R.K. New York, 1949, chap. 2.
- [10]. Двинин С.А., Довженко В.А. Кузовников А.А. Физика плазмы, т.25, Вып. 11, с. 882–893, 1999
- [11]. Франк–Каменецкий Д.А.. Лекции по физике плазмы. М. Атомиздат, 1968.
- [12]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. X. Е.М.Лифшиц, Л.П. Питаевский. Физическая кинетика. М. Наука. 1979 г. С.135–138.
- [13]. Двинин С.А. Физические основы газового разряда. Ч. I. Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2012. 120 с.

Контрольные вопросы

1. Какие режимы движения заряженных частиц в электрическом поле вам известны?
2. Как меняется сечение взаимодействия электрона с атомом при изменении скорости движения электрона? Почему?
3. Как меняется сечение взаимодействия электрона с атомом при изменении скорости движения электрона? Почему?
4. Почему и когда происходит переход от режима нормального дрейфа заряженных частиц к аномальному? Какой механизм взаимодействия заряженных частиц и атома?

Справочные данные

Атом	Молекулярный вес (у.е.)	Число электронов в атоме	Подвижность ионов при давлении 760 Тор, (см ² /Вс)		Потенциал ионизации, (эВ)	Энергия, соответствующая максимуму сечения ионизации (эВ)	Максимум сечения ионизации (10 ⁻¹⁶ см ⁻²)
He	4	2	He⁺, 10.4	He₂⁺, 16.7	24.58	130	0.7
Ne	20.18	10	Ne⁺, 4.1	Ne₂⁺, 6.14	21.56	180	0.77
Ar	39.95	18	Ar⁺, 1.43	Ar₂⁺, 1.838	15.76	90	2.8
Kr	83.8	36	Kr⁺, 0.9	Kr₂⁺, 1.2	14.0	80	4.25
Xe	131.29	54	Xe⁺, 0.58	Xe₂⁺, 0.78	12.12	110	2.55
H	1	1	H⁺, 15.7 H₃⁺, 11.1		H – 13.59	65	0.7
H₂	2				H₂ – 15.43	70	0.96
N₂	28	7	N⁺, 2.97 N₂⁺, 1.84 N₃⁺, 2.26 N₄⁺, 2.33		N – 14.53	85	1.6
					N₂ – 15.58	120	2.7
O₂	32	9	O₂⁺, 2.24 O₄⁺, 2.16		O – 13.62	100	1.5
					O₂ – 12.07	110	5.4
CO₂	44		CO⁺CO 1.9	C⁺ 2.7	CO₂ – 13.79	120	3.5

5. Что такое перезарядка иона? Как соотносятся сечения резонансной перезарядки и упругого рассеяния иона на атоме?
6. В каких случаях необходимо учитывать инерцию электронов и ионов?

7. Что такое субнормальный положительный столб?
8. Каковы основные предположения модели газового разряда Ленгмюра и Тонкса? Шоттки?
9. Описывает ли модель Шоттки процессы в граничных областях газового разряда?
10. В каких случаях функция распределения заряженных частиц в электрическом поле изотропна, а в каких нет?
11. Зачем необходимо знать функцию распределения ионов по энергиям?
12. Какие режимы газового разряда используются:
 - А) для ионного травления (Plasma etching)?
 - Б) для нанесения пленок на поверхность из газовой фазы (Plasma enhanced CVD method)?
 - В) в источниках чистых спектральных линий?
 - Г) в газоразрядных источниках света?
 - Д) в газовых лазерах (гелий–неоновом, аргоновом, лазере на углекислом газе)?
 - Е) в газоразрядных плазменных панелях (которые используются в плоских телевизионных экранах)?
 - Ж) в объемных химических реакторах?
13. Какими простыми формулами выражается время жизни иона в режимах свободного пробега ионов, диффузии с учетом аномального дрейфа, диффузионном режиме? В каких случаях можно пользоваться этими формулами?
14. Объясните, почему возможно существование положительного столба газового разряда в условиях, когда длина свободного пробега электрона больше, чем размер разряда?
15. Каков механизм формирования распределения потенциала в положительном столбе газового разряда?
16. Что такое амбиполярная диффузия?
17. Почему коэффициенты амбиполярной диффузии вдоль и поперек внешнего электрического поля различны? (см. дополнительную литературу).
18. Как рассчитать падение потенциала в слое пространственного заряда на границе положительного столба? Если слой бесстолкновительный? Столкновительный?