Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физической электроники

Павлов Александр Игоревич

Студент 214 группы

Курсовая работа на тему

«Собственные колебания ограниченной плазмы в магнитном поле»

Научный руководитель

доц. Двинин Сергей Александрович

Москва

2020

Одним из важнейших вопросов организации плазменных технологических процессов является разработка источников плазмы, обладающих свойствами, оптимальными для данной технологии, например: высокой однородностью, заданными плотностью плазмы, энергией заряженных частиц, концентрацией химически активных радикалов. Анализ показывает, что наиболее перспективными для применения в промышленных технологиях являются высокочастотные (ВЧ) источники плазмы, так как, во-первых, с их помощью можно обрабатывать как проводящие, так и диэлектрические материалы, а во- вторых, в качестве рабочих газов можно использовать не только инертные, но и химически активные газы. Сегодня известны источники плазмы, основанные на емкостном и индуктивном ВЧ-разрядах. Особенностью емкостного ВЧ-разряда, наиболее часто используемой в плазменных технологиях, является существование приэлектродных слоев объемного заряда, в которых формируется среднее по времени падение потенциала, ускоряющего ионы в направлении электрода. Это позволяет обрабатывать с помощью ускоренных ионов образцы материалов, расположенные на электродах ВЧ-емкостного разряда. Один из последних анализов применения разряда в магнитном поле и способов его возбуждения поведен в [1]. В дальнейшем мы во многом следуем этой работе.

Индуктивный ВЧ-разряд без магнитного поля известен уже более ста лет [2, 3]. Это разряд, возбуждаемый током, текущим по индуктору, расположенному на боковой или торцевой поверхности, как правило, цилиндрического источника плазмы. Еще в 1891 г. Дж.Дж. Томсон высказал предположение [2] о том, что индуктивный разряд вызывается и поддерживается вихревым электрическим полем, которое создается магнитным полем, в свою очередь, индуцируемым током, текущим по антенне. В 1928-1929 гг., полемизируя с Дж.Дж. Томсоном, Д. Таунсенд и Р. Дональдсон [4, 5] высказали идею о том, что индуктивный ВЧ-разряд поддерживается не вихревыми электрическими полями, а потенциальными, появляющимися благодаря наличию разности потенциалов между витками индуктора. В 1929 г. К. Мак-Кинтон [6] экспериментально показал возможность существования двух режимов горения разряда.

В настоящее время известны источники плазмы низкого давления, принцип действия которых основан на индуктивном ВЧ-разряде в отсутствие магнитного поля, а также на индуктивном ВЧ-разряде, помещенном во внешнее магнитное поле с индукцией, соответствующей условиям электронного циклотронного резонанса (ЭЦР) и условиям возбуждения геликонов и волн Трайвелписа - Голда (ТГ) (далее называемых геликонными источниками).

Типичными примерами источников плазмы, работающих на индуктивном ВЧ-разряде без магнитного поля, являются плазменные реакторы, предназначенные для травления подложек [7], источники ионов, предназначенные для реализации земных ионно-пучковых технологий и работы в космосе в качестве двигателей коррекции орбиты космических аппаратов [8], источники света [9]. Общей конструктивной особенностью перечисленных устройств является наличие газоразрядной камеры (ГРК), на внешней поверхности которой или внутри ее расположен индуктор или антенна. С помощью антенны, подключенной к высокочастотному генератору, в объем ГРК вводится ВЧ-мощность и зажигается безэлектродный разряд. Токи, текущие по антенне, индуцируют в плазме вихревое электрическое поле, которое нагревает электроны до энергий, необходимых для эффективной ионизации рабочего газа. Типичные плотности плазмы в плазменных реакторах составляют величину 10^{11} - 3 x 10^{12} см ^{3}, а в источниках ионов — 3 x 10^{10} - 3 x 10^{11} см ^{3}. Характерное давление нейтрального газа в плазменных реакторах изменяется от 1 до 30 мТор, в источниках ионов составляет величину 0,1 мТор, в источниках света — 0,1-10 Тор.

Известно, что в плазме индуктивного разряда ВЧ- электрические поля скинируются, т.е. нагрев электронов осуществляется в узком пристеночном слое. При приложении к плазме индуктивного ВЧ-разряда внешнего магнитного поля появляются области прозрачности, в которых ВЧ-поля проникают вглубь плазмы и нагрев электронов осуществляется во всем ее объеме. Этот эффект использован в источниках плазмы, принцип действия которых основан на ЭЦР. Такие источники работают главным образом в микроволновом диапазоне (2,45 ГГц) [10]. Микроволновое излучение вводится, как правило, через кварцевое окно в цилиндрическую газоразрядную камеру, в которой с помощью магнитов формируется неоднородное магнитное поле. Магнитное поле характеризуется наличием одной или нескольких резонансных зон, в которых выполняются условия ЭЦР и происходит ввод ВЧ-мощности в плазму. Другим типом источников, использующих индуктивный ВЧ-разряд с внешним магнитным полем, являются геликонные источники плазмы [11, 12], обычно состоящие из двух полых цилиндров, изготовленных из диэлектрического материала. На внешней боковой поверхности цилиндра меньшего диаметра устанавливается антенна, форма которой оптимальна для возбуждения геликонов и ТГ-волн. Волны проходят в камеру с большим диаметром вдоль аксиального магнитного поля, создаваемого магнитной системой. Типичная концентрация плазмы в геликонных источниках достигает 10^{12} см ^{3}, магнитное поле составляет величину порядка 500 -1000 Гс, ВЧ-мощность — 2-3 кВт.

В работах [13, 14] представлены плазменный реактор и источник ионов, работающие при условиях, когда геликон является поверхностной волной, а ТГ-волна проникает вглубь плазмы. Источник ионов [14] позволяет получать плотность ионного тока от 0,5 до 3 мА см ^{2} при уровне ВЧ-мощности, не превышающем 150 Вт. Магнитное поле составляет величину 200-300 Гс.

Обобщим приведенные выше параметры плазмы, типичные для индуктивных источников плазмы. Как правило, радиус ВЧ-источников плазмы составляет 2 – 25 см, длина L – от 3 до 50 см. Диапазон изменения плотности плазмы $n_e \sim 10^{10}$–$3{\cdot}10^{12}$ см$^{-3}$ при температуре электронов $T_e \sim 3$—8 эВ ($3{\cdot}10^4$ — $9{\cdot}10^4$ К). Давление нейтрального газа p в источниках (за исключением источников света) изменяется от 0,1 до 10 мТор. Величина магнитного поля изменяется от 0 до 1 кГс. В настоящей статье свойства индуктивного ВЧ-разряда проанализированы в пределах указанных диапазонов параметров плазмы. Несмотря на большое число схем плазменных устройств, работающих на индуктивном ВЧ-разряде, постоянно возрастающие и изменяющиеся требования плазменных технологий требуют усовершенствования моделей старых устройств и разработки новых перспективных моделей.

1. Постановка задачи

Как видно из проведенного обзора литературы, развитие плазменных технологий ставит перед разработчиками источников плазмы целый ряд вопросов. Как правило, при решении электродинамической задачи в магнитном поле ограничиваются предположением о возбуждении одной электродинамической моды. Кроме того жестко не фиксируются граничные условия для электромагнитного поля, что не позволяет описать возможный переход от одной электромагнитной моды поля поддерживающей разряд к другой. Поэтому при написании данной курсовой работы была поставлена следующая задача.

1. Изучить типы волн, которые могут быть использованы для поддержания плазмы в магнитном поле.

2. Рассчитать дисперсию этих волн и проанализировать какие из них могут быть использованы для возбуждения плазмы разряда.

3. Используя существующие в научной группе программы расчета импеданса разряда с помощью пакета программ COMSOL Multiphysics® провести предварительный расчет импеданса разряда в постоянном однородном и пространственного распределения электромагнитного поля в разряде.

2. Уравнения Максвелла. Диэлектрическая проницаемость холодной плазмы в магнитном поле

Для описания пространственного распределения электромагнитного поля в плазме необходимо решать уравнения Максвелла [15 – 18]. Для синусоидальных полей с частотой ω

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) \\ \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \exp(-i\omega t), \tag{1}$$

они могут быть записаны в виде

$$\left[\nabla\times\mathbf{H}\right] + ik_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{j}(\mathbf{E}),\ \left[\nabla\times\mathbf{E}\right] - ik_0\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\mathbf{H} = 0,\ (\nabla\cdot\mathbf{H}) = 0, \tag{2}$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0 .$$

При записи уравнений использованы соотношения **r**, t – время и координата, $k_0=\omega/c$, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – скорость света, ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, **E**, **H** – электрическое и магнитное поля, j – ток электронов в плазме, ρ – пространственный заряд электронов. Мы рассматриваем достаточно высокие частоты электромагнитного поля, при которых движением ионов можно пренебречь. В (1) система уравнений Максвелла записана в системе СИ. В системе СГС эта система будет иметь вид

$$\left[\nabla\times\mathbf{H}\right]+i\frac{\omega}{c}\mathbf{E}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{E}),\ \left[\nabla\times\mathbf{E}\right]-i\frac{\omega}{c}\mathbf{H}=0,\ \left(\nabla\cdot\mathbf{H}\right)=0,\ \left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)=4\pi\rho .$$

Для того, чтобы рассчитать пространственные распределения электромагнитного поля, необходимо рассчитать токи электронов и их пространственный заряд, которые возникнут под воздействием электрического поля. В простейшем случае для их расчета используют уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial\mathbf{V_e}}{\partial t}+\left(\mathbf{V_e}\nabla\right)\mathbf{V_e}=-\frac{\gamma kT_e}{m}\frac{\nabla n_e}{n_e}-\frac{e}{m}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\mathbf{V_e}\times\left(\mathbf{B}_0+\mathbf{B}\right)\right]\right\}-\nu_{en}\mathbf{V_e},$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t}+\left(\nabla\cdot n_e\mathbf{V_e}\right)=0. \qquad (3)$$

Введем обозначения: e, m – заряд и масса электрона, n_e, T_e, $\mathbf{V}_e$ – плотность, температура и скорость электронов, $\mathbf{\Omega}_+=e\mathbf{B}/mc$ – их циклотронная частота.

Ограничимся линейным приближением по электромагнитному полю и будем искать решение в виде синусоидальных волн

$$\mathbf{V}_e=\mathbf{V}_0\exp\left(-i\omega t+i\mathbf{kr}\right),\ \mathbf{E}_e=\mathbf{E}_0\exp\left(-i\omega t+i\mathbf{kr}\right),\ n_e=n_0+\delta n_e\exp\left(-i\omega t+i\mathbf{kr}\right).$$

Получим систему уравнений, в которой предполагается, что постоянное магнитное поле направлено вдоль оси 0Z и введены обозначения $C_S^2=\gamma kT_e/m$, $\gamma=c_P/c_V$ – показатель адиабаты, c_p, c_v – теплоемкости электронного газа при постоянном давлении и постоянном объеме

$$-i\omega\mathbf{V}_e=-i\mathbf{k}C_S^2\frac{\delta n_e}{n_0}-\frac{e}{m}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\mathbf{V}\times\mathbf{B}_0\right]\right\}-\nu_{en}\mathbf{V_e},\ \frac{\delta n_e}{n_0}=\frac{i\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V_e}\right)}{i\omega}. \qquad (4)$$

Подставим в левое уравнение наше выражение для плотности электронов

$$\left(-i\omega+\nu_{en}\right)\mathbf{V}_e+i\mathbf{k}C_S^2\frac{\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V_e}\right)}{\omega}+\frac{e}{mc}\left[\mathbf{V}\times\mathbf{B}_0\right]=-\frac{e}{m}\mathbf{E}. \qquad (5)$$

Или

$$-i\omega\mathbf{V}_e=-i\mathbf{k}C_S^2\frac{\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V_e}\right)}{\omega}-\frac{e}{m}\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}\begin{bmatrix}\mathbf{e_x} & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \mathbf{V}_x & \mathbf{V}_y & \mathbf{V}_z\\ 0 & 0 & \mathbf{B}_0\end{bmatrix}\right\}-\nu_{en}\mathbf{V_e}$$

Решение этой системы уравнений (см. приложение I) дает возможность рассчитать скорости электронов, их ток и возмущения их плотности.

$$\begin{pmatrix}\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_x^2\right) & \left(-i\Omega_e\omega-C_S^2k_xk_y\right) & -C_S^2k_xk_z\\ \left(i\omega\Omega_e-C_S^2k_xk_y\right) & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_y^2\right) & -C_S^2k_yk_z\\ -C_S^2k_xk_z & -C_S^2k_yk_z & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_z^2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{V}_x\\ \mathbf{V}_y\\ \mathbf{V}_z\end{pmatrix}==-\frac{ie\omega}{m}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_x\\ \mathbf{E}_y\\ \mathbf{E}_z\end{pmatrix} \qquad (5A)$$

Здесь $\mathbf{k}=\left(k_x,k_y,k_z\right)$ Очень часто рассматривается распространение волны под углом θ – к оси 0Z. В этим случае $\mathbf{k}=\left(k\sin\theta,0,k\cos\theta\right)$. Отметим, что при анализе собственных волн в волноведущих структурах вектор k может иметь не только действительную, но и комплексную компоненту.

Умножая (5) на плотность и заряд электронов получим

$$\begin{pmatrix}\mathbf{j}_x\\ \mathbf{j}_y\\ \mathbf{j}_z\end{pmatrix}=-\frac{ine^2\omega}{m}\begin{pmatrix}\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_x^2\right) & \left(-i\Omega_e\omega-C_S^2k_xk_y\right) & -C_S^2k_xk_z\\ \left(i\omega\Omega_e-C_S^2k_xk_y\right) & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_y^2\right) & -C_S^2k_yk_z\\ -C_S^2k_xk_z & -C_S^2k_yk_z & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_z^2\right)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_x\\ \mathbf{E}_y\\ \mathbf{E}_z\end{pmatrix}. \quad (6)$$

Фактически в (5) мы получили выражение для тензора проводимости плазмы

$$\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)=-\frac{ine^2\omega}{m}\begin{pmatrix}\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_x^2\right) & \left(-i\Omega_e\omega-C_S^2k_xk_y\right) & -C_S^2k_xk_z\\ \left(i\omega\Omega_e-C_S^2k_xk_y\right) & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_y^2\right) & -C_S^2k_yk_z\\ -C_S^2k_xk_z & -C_S^2k_yk_z & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_z^2\right)\end{pmatrix}^{-1},$$

А также для диэлектрической проницаемости плазмы

$$\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$-\frac{4\pi ne^2}{m}\begin{pmatrix}\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_x^2\right) & \left(-i\Omega_e\omega-C_S^2k_xk_y\right) & -C_S^2k_xk_z\\ \left(i\omega\Omega_e-C_S^2k_xk_y\right) & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_y^2\right) & -C_S^2k_yk_z\\ -C_S^2k_xk_z & -C_S^2k_yk_z & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_z^2\right)\end{pmatrix}^{-1}.$$

Хотя в полученной формуле мы учли давление электронного газа, мы не учли конечность Ларморовского радиуса электронов, поэтому наше выражение справедливо только на масштабах больших по сравнению с ларморовским радиусом электронов. В противном случае нужно использовать более точные выражения [17, 18]. В литературе обычно используется диэлектрическая проницаемость холодной плазмы, в которой давление электронов не учитывается и $C_S=0$. В этом случае рассматриваемая матрица легко обращается и мы получаем хорошо известное выражение для диэлектрической проницаемости [19] $\omega_{Pe}^2=4\pi ne^2/m$:

$$\left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\varepsilon_\perp & ig & 0\\ -ig & \varepsilon_\perp & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\dfrac{\left(\omega+i\nu_{en}\right)\omega_{Pe}^2}{\omega\left(\left(\omega+i\nu_{en}\right)^2-\Omega_e^2\right)} & \dfrac{i\Omega_e\omega_{Pe}^2}{\omega\left(\left(\omega+i\nu_{en}\right)^2-\Omega_e^2\right)} & 0\\ \dfrac{-i\Omega_e\omega_{Pe}^2}{\omega\left(\left(\omega+i\nu_{en}\right)^2-\Omega_e^2\right)} & 1-\dfrac{\left(\omega+i\nu_{en}\right)\omega_{Pe}^2}{\omega\left(\left(\omega+i\nu_{en}\right)^2-\Omega_e^2\right)} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\omega_{Pe}^2}{\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)}\end{pmatrix}.$$

3. Дисперсия волн, используемых для поддержания газового разряда в магнитном поле. Традиционный расчет. Уравнение четвертой степени

Полученные в предыдущем параграфе выражения для тока в плазме совместно с уравнениями максвелла позволяет получить уравнения, описывающие дисперсию (связь постоянной распространения и частоты волны). Простейший путь заключается в использовании стандартного подхода холодной плазмы и полученного в предыдущем параграфе выражения для диэлектрической проницаемости. Из уравнений Максвелла следует

$$\left[\nabla\times\left[\nabla\times\mathbf{E}\right]\right]-\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{E}=0.$$

При учете пространственной зависимости в виде $\exp\left(i\mathbf{kr}\right)$ уравнение принимает вид.

$$\left[\mathbf{k}\times\left[\mathbf{k}\times\mathbf{E}\right]\right]+\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{E}=0$$

В векторном виде это уравнение будет

$$\begin{pmatrix} k_y^2+k_z^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp & k_xk_y+i\dfrac{\omega^2}{c^2}g & k_xk_z \\ k_xk_y-i\dfrac{\omega^2}{c^2}g & k_x^2+k_z^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp & k_yk_z \\ k_xk_z & k_yk_z & k_x^2+k_y^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}=0$$

Постоянная распространения электромагнитной волны как функция частоты, или частота, как функция постоянной распространения, может быть получена как решение дисперсионного уравнения, представляющее собой определитель системы этой системы уравнений

$$\begin{vmatrix} k_y^2+k_z^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp & k_xk_y+i\dfrac{\omega^2}{c^2}g & k_xk_z \\ k_xk_y-i\dfrac{\omega^2}{c^2}g & k_x^2+k_z^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp & k_yk_z \\ k_xk_z & k_yk_z & k_x^2+k_y^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel \end{vmatrix}=0.$$

Раскрытие определителя приводит в так называемому уравнению четвертой степени.

$$\begin{gathered}\left(k_y^2+k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\right)\left(k_x^2+k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\right)\left(k_x^2+k_y^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel\right)-\left(k_y^2+k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\right)k_y^2k_z^2+ \\ +\left(k_xk_y+i\frac{\omega^2}{c^2}g\right)k_yk_xk_z^2-\left(k_x^2k_y^2+\frac{\omega^4}{c^4}g^2\right)\left(k_x^2+k_y^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\parallel\right)+ \\ +\left(k_xk_y-i\frac{\omega^2}{c^2}g\right)k_xk_yk_z^2-\left(k_x^2+k_z^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\right)k_x^2k_z^2=0\end{gathered}\tag{7}$$

Запишем это уравнение в нескольких формах удобных для вычисления $h=k_z$, $k_\perp^2=k_x^2+k_y^2$:

$$\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}h^4-\left\{\frac{2\omega^2\varepsilon_\parallel}{c^2}-\left\{\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}+1\right\}k_\perp^2\right\}h^2+\left\{\frac{\omega^4\varepsilon_\parallel}{c^4}\left\{\varepsilon_\perp-\frac{g^2}{\varepsilon_\perp}\right\}-\left\{\frac{\omega^2\varepsilon_\parallel}{c^2}+\frac{\omega^2\varepsilon_\perp}{c^2}-\frac{\omega^2g^2}{c^2\varepsilon_\perp}\right\}k_\perp^2+k_\perp^4\right\}=0 \tag{8}$$

или

$$\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}h^4-\left\{\frac{2\omega^2\varepsilon_\parallel}{c^2}-\left\{\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}+1\right\}k_\perp^2\right\}h^2+\left\{k_\perp^2-\frac{\omega^2\varepsilon_\parallel}{c^2}\right\}\left\{k_\perp^2-\frac{\omega^2}{c^2}\left\{\varepsilon_\perp-\frac{g^2}{\varepsilon_\perp}\right\}\right\}=0$$

Для величины k:

$$k_\perp^4-\left\{\frac{\omega^2\varepsilon_\parallel}{c^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left\{\varepsilon_\perp-\frac{g^2}{\varepsilon_\perp}\right\}-\left\{\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}+1\right\}h^2\right\}k_\perp^2+\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}\left\{\left\{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp-h^2\right\}^2-\frac{\omega^4}{c^4}g^2\right\}=0$$

Для частоты:

$$\frac{\omega^4}{c^4}\varepsilon_\parallel\left(\varepsilon_\perp-\frac{g^2}{\varepsilon_\perp}\right)-\frac{\omega^2}{c^2}\left(2\varepsilon_\parallel h^2+k_\perp^2\left(\varepsilon_\parallel+\varepsilon_\perp-\frac{g^2}{\varepsilon_\perp}\right)\right)+\left(\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}h^4+\left(\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}+1\right)h^2k_\perp^2+k_\perp^4\right)=0\,.$$

5. Дисперсия волн, используемых для поддержания газового разряда в магнитном поле с учетом давления электронов

Второй подход состоит в использовании общих решений уравнений гидродинамики с подстановкой в них решений уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Выделим в электрическом поле две компоненты – потенциальное и вихревое поля. В соответствии с уравнениями Максвелла получим (e>0):

$$\mathbf{E}=-\frac{c}{i\omega}\left[\nabla\times\mathbf{H}\right]+\frac{4\pi}{i\omega}\mathbf{j}=-\frac{c}{i\omega}\left[\nabla\times\mathbf{H}\right]-\frac{4\pi n_0 e}{i\omega}\mathbf{V}=-\frac{c}{\omega}\left[\mathbf{k}\times\mathbf{H}\right]-\frac{4\pi n_0 e}{i\omega}\mathbf{V}\,,$$

$$\mathbf{H}=\frac{c}{i\omega}\left[\nabla\times\mathbf{E}\right]=\frac{c}{\omega}\left[\mathbf{k}\times\mathbf{E}\right],\ \left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{H}\right)=0,\ \left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)=-4\pi\delta n_e e=-\frac{4\pi n_0 e}{i\omega}\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_e\right).$$

Отсюда

$$\mathbf{E}+\frac{c^2}{\omega^2}\left[\mathbf{k}\times\left[\mathbf{k}\times\mathbf{E}\right]\right]=-\frac{4\pi n_0 e}{i\omega}\mathbf{V}_e$$

Как обычно, это уравнение мы можем решить только учитывая, что $\left[\nabla\times\left[\nabla\times\mathbf{E}\right]\right]=\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)-\nabla^2\mathbf{E}$. Тогда

$$\left(1-\frac{c^2\mathbf{k}^2}{\omega^2}\right)\mathbf{E}=-\frac{4\pi n_0 e}{i\omega}\mathbf{V}_e-\frac{c^2\mathbf{k}}{\omega^2}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)$$

То есть решить его, не выделяя продольные и поперечные поля нельзя. Тогда умножая наше уравнение скалярно на k (или используя уравнение для дивергенции **E**) получим

$$\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}\right)=-\frac{4\pi n_0 e}{i\omega}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_e\right),\ \mathbf{E}=-\frac{4\pi n_0 e}{i\omega}\left(\mathbf{V}_e-\frac{c^2\mathbf{k}}{\omega^2}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_e\right)\right)\Big/\left(1-\frac{c^2\mathbf{k}^2}{\omega^2}\right)$$

Подставим эти выражения в полученные уравнения для скорости частиц (5), вводя обозначения $\mathbf{\Omega_0}=e\mathbf{B}_0/mc$, $\omega_{Pe}^2=4\pi n_0 e^2/m$

$$i\omega\left(1-\frac{c^2\mathbf{k}^2}{\omega^2}\right)\left(\left(-i\omega+\nu_{en}\right)\mathbf{V}_e+i\mathbf{k}C_S^2\frac{\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V_e}\right)}{\omega}+\left[\mathbf{V}\times\mathbf{\Omega}_0\right]\right)-\omega_{Pe}^2\left(\mathbf{V}_e-\frac{c^2\mathbf{k}}{\omega^2}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_e\right)\right)=0\,. \qquad (9)$$

В матричном виде:

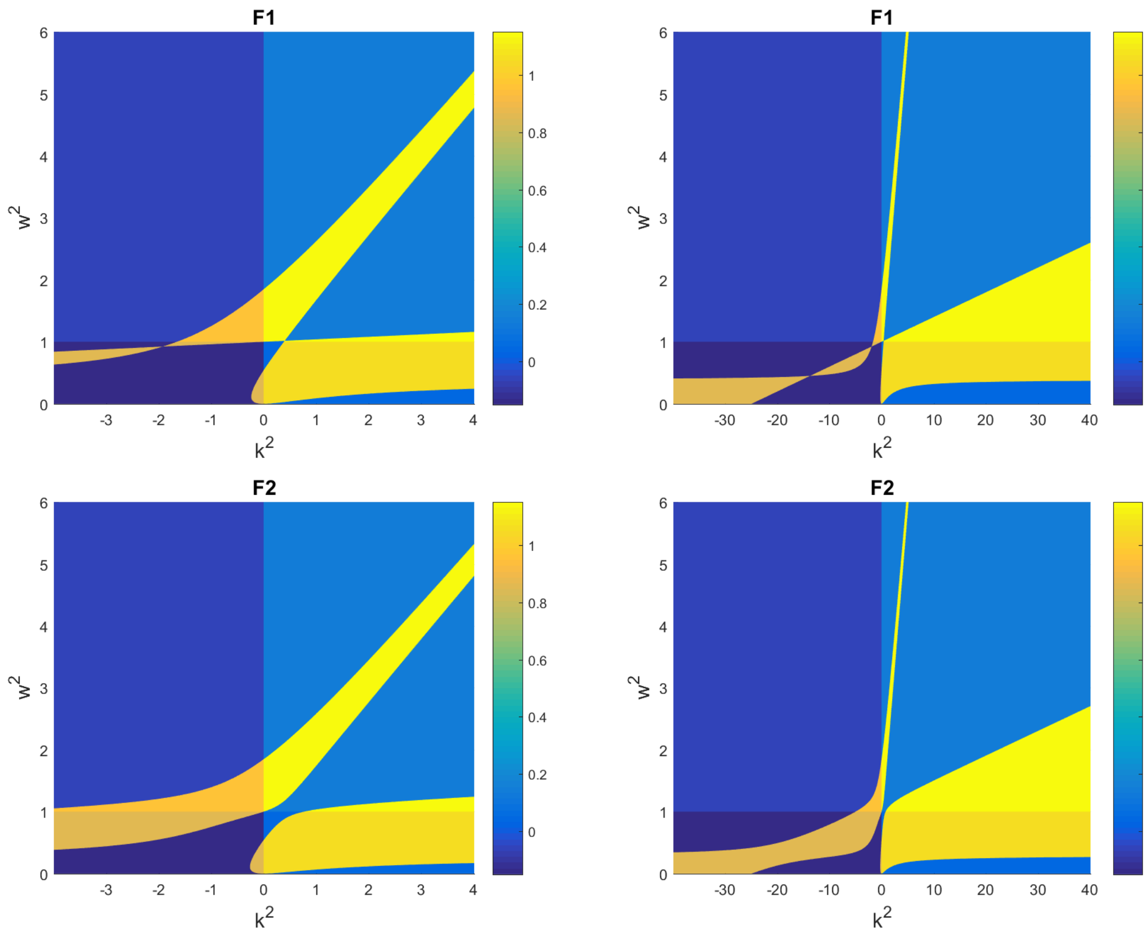
$$\left(1-\frac{c^2\mathbf{k}^2}{\omega^2}\right)\begin{pmatrix} \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_x^2\right) & \left(-i\Omega_e\omega-C_S^2k_xk_y\right) & -C_S^2k_xk_z \\ \left(i\omega\Omega_e-C_S^2k_xk_y\right) & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_y^2\right) & -C_S^2k_yk_z \\ -C_S^2k_xk_z & -C_S^2k_yk_z & \left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-C_S^2k_z^2\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x_0}V_x \\ \mathbf{y_0}V_y \\ \mathbf{z_0}V_z \end{pmatrix}= \tag{9A}$$

$$=\omega_{Pe}^2\left(\begin{pmatrix} \mathbf{x_0}V_x \\ \mathbf{y_0}V_y \\ \mathbf{z_0}V_z \end{pmatrix}-\frac{c^2}{\omega^2}\begin{pmatrix} \mathbf{x_0}k_x \\ \mathbf{y_0}k_y \\ \mathbf{z_0}k_z \end{pmatrix}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})\right)$$

Мы получили систему уравнений для скорости электронов, определитель которой есть дисперсионное уравнение, которое в отличие от предыдущего будет учитывать и тепловое движение частиц. Решение уравнения приведено в Приложении IV.

Результаты расчета дисперсии волн приведены на рисунках ниже. На рисунке 1 выполнены условия $\omega_{Le}>\Omega_0$ (плазменная частота ω_{Le} больше циклотронной Ω_0), на рисунке 2 $\Omega_0>\omega_{Le}$, на рисунке 3 $\Omega_0=0$. На рисунках используются безразмерные переменные. Ось частот нормирована на квадрат максимальной из частот ω_{Le}, Ω_0 $\tilde{\Omega}^2=Max\left(\Omega_0^2,\omega_{Le}^2\right)$, то есть $w^2=\omega^2/\tilde{\Omega}^2$. Квадрат волнового числа нормирован на $\tilde{\Omega}^2/c^2$, то есть $K^2=k^2c^2/\tilde{\Omega}^2$.

На графиках приведены расчеты: Сверху вниз 1 – распространение вдоль магнитного поля, 2. – под углом 30°, 3 – под углом 60°, 4 – перпендикулярно магнитному поля. В соответственно с формулами предыдущего параграфа $\left(k_x,k_y,k_z\right)=\left(k\sin\theta,0,k\cos\theta\right)$. Дисперсионные кривые различных волн лежат на линиях контакта областей с различным зветом.



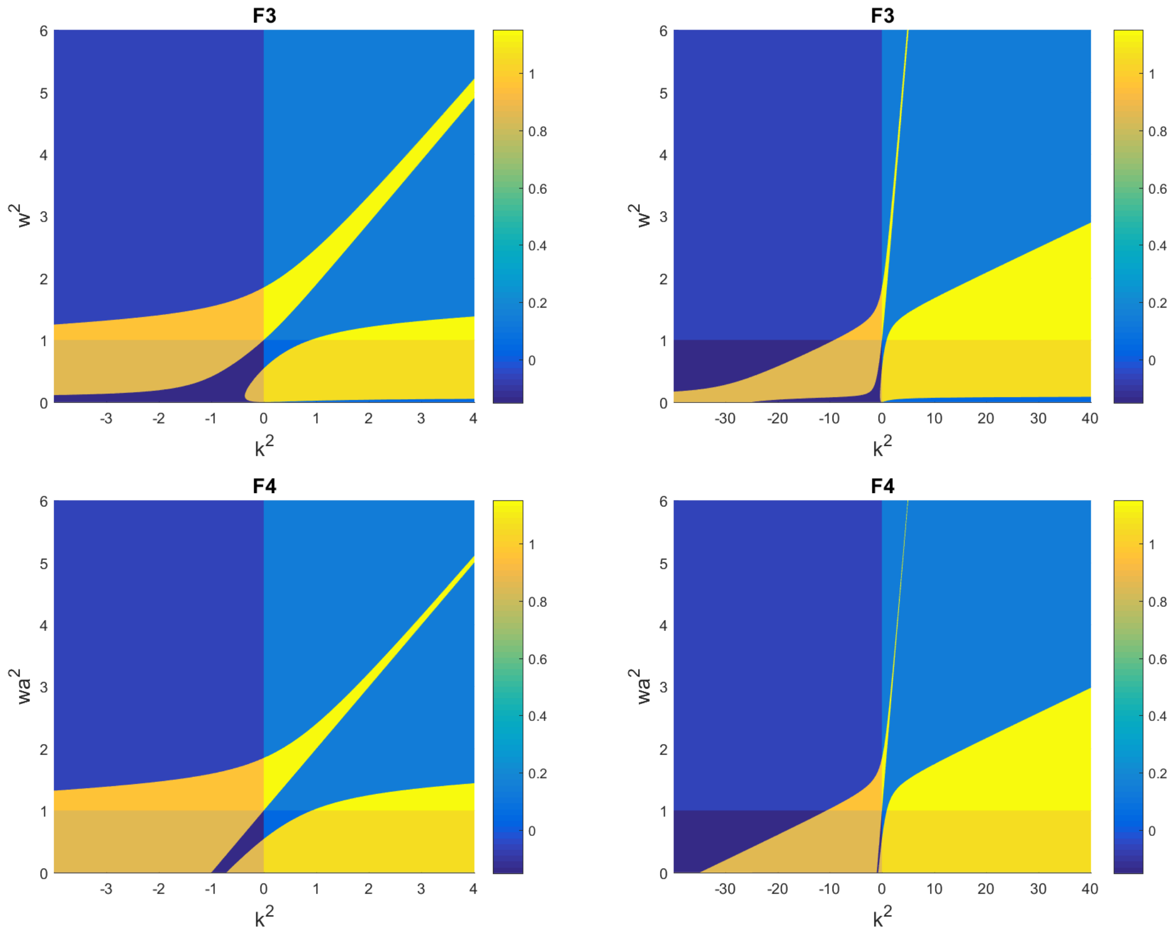
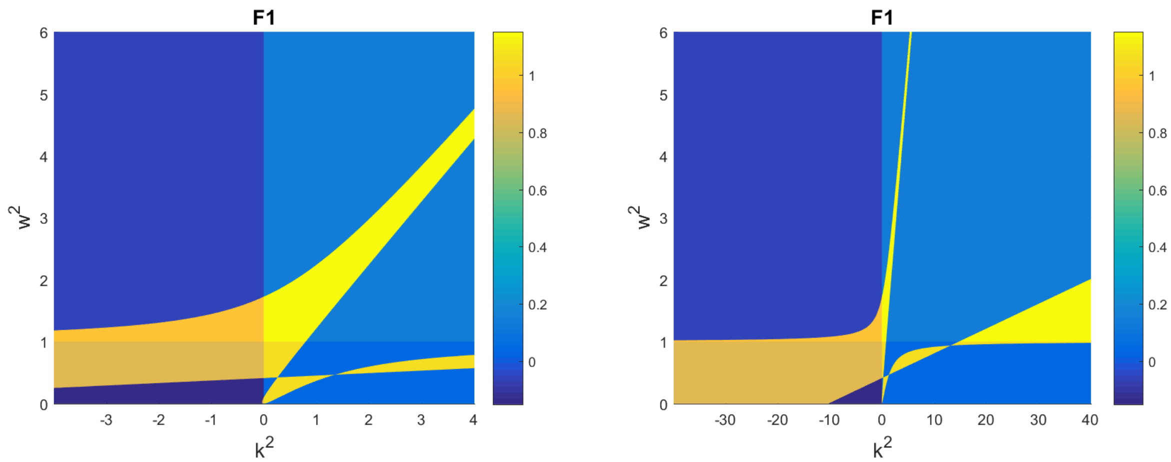


Рис. 1. Дисперсия волн в магнитном поле в зависимости от угла распространения. 1 – распространение вдоль магнитного поля, 2. – под углом 30°, 3 – под углом 60°, 4 – перпендикулярно магнитному поля. ω_{Pe}=5.6·10^9 с$^{-1}$, Ω_e=3.5·10^9 с$^{-1}$, V_S/c=0.2. Можно выделить области распространения циркулярно-поляризованных поперечных волн, геликона, ленгмюровских (верхнегибридных) волн, скин-эффекта и дебаевского экранирования. Рисунки слева и справа отличаются масштабом по оси 0Z.



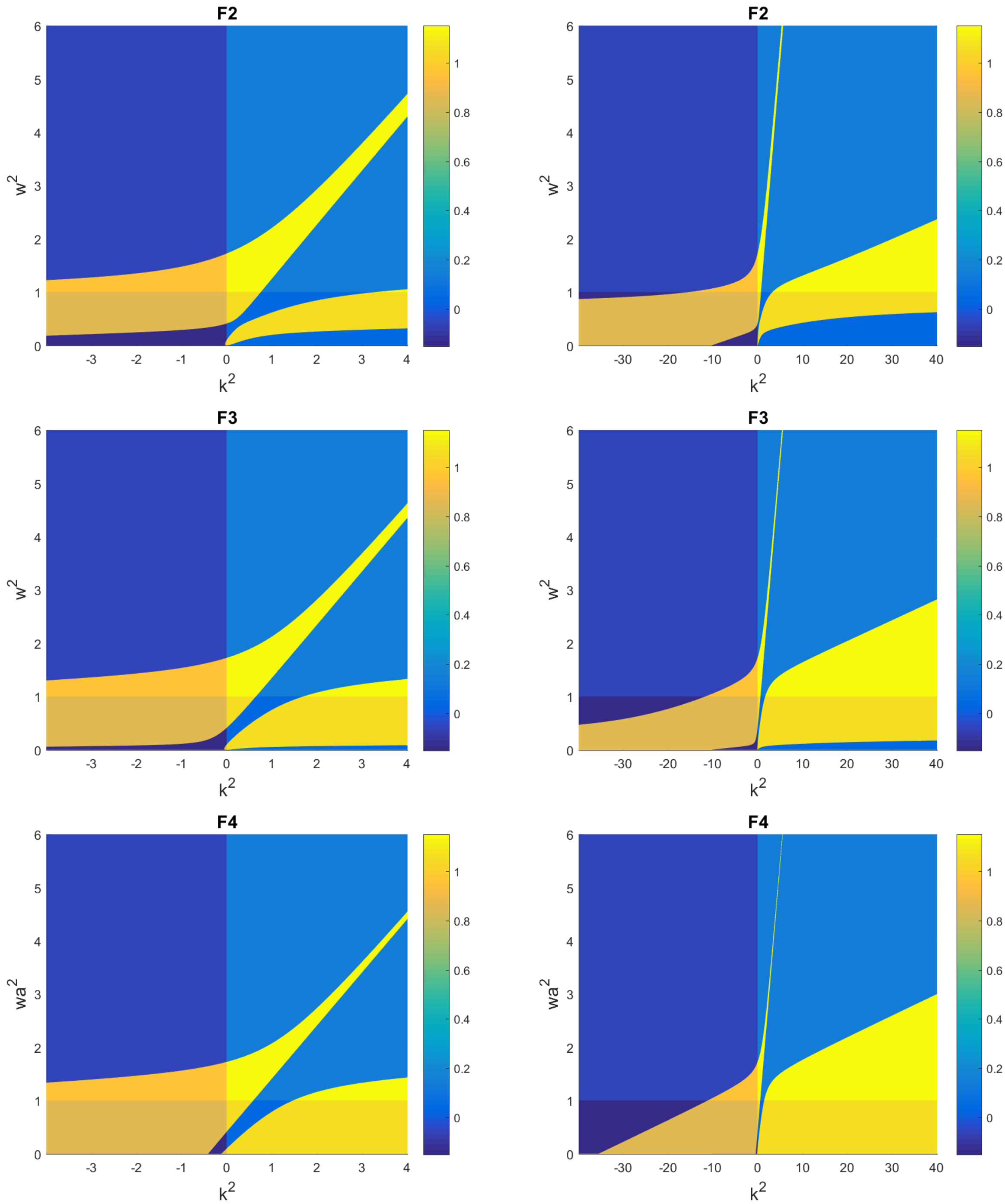


Рис. 2. Дисперсия волн в магнитном поле в зависимости от угла распространения. 1 – распространение вдоль магнитного поля, 2. – под углом 30°, 3 – под углом 60°, 4 – перпендикулярно магнитному поля. ω_{Pe}=5.6·10^9 с$^{-1}$, Ω_e=8.8·10^9 с$^{-1}$, V_S/c=0.2. Можно выделить области распространения циркулярно-поляризованных поперечных волн, геликона, ленгмюровских (верхнегибридных) волн, скин-эффекта и дебаевского экранирования. Рисунки слева и справа отличаются масштабом по оси 0Z.

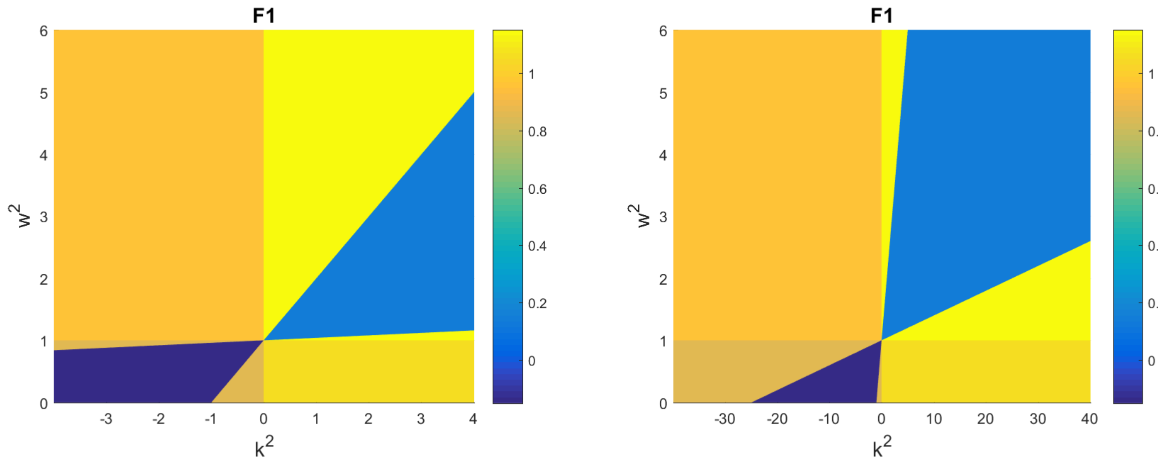


Рис. 3. Дисперсия волн в отсутствие магнитного поля. ω_{Pe}=5.6·10^9 с$^{-1}$, Ω_e=0 с$^{-1}$, V_S/c=0.2. Можно выделить ленгмюровскую волну, поперечную волну, область скин эффекта и область дебаевского экранирования.

4. Расчет импеданса плазмы с помощью программы COMSOL Multiphysics®

Расчет импеданса разряда проводился с помощью пакета программ COMSOL Multiphysics® лицензия на которую принадлежит физическому факультету МГУ. Уравнения Максвелла решались в области пространства, включающей центральную часть камеры ($0<r<R_3$, $-L<z<L$) и межэлектродное пространство, ($R_1<r<R_2$, $-L<|z|<L+L_2$), **рис. 4**. На электродах и стенке вакуумной камеры ставились нулевые граничные условия для тангенциальной компоненты электрического поля. Рассматривался разряд с симметричным возбуждением, для которого ток I, втекающий через нижний электрод равен току, вытекающему через верхний. На внешней границе 6 ($R_1<r<R_2$, $-|z|=L+L_2$) азимутальное магнитное поле считалось заданным $H_\varphi\left(r,\pm\left(L+L_2\right)\right)=I/2\pi r$.

Импеданс рассчитывался в нескольких точках. Во-первых, на границе разряда (r=R), в этом случае в соответствии с общими формулами

$$I\left(R\right)=\frac{2\pi R}{L}\int_0^L H_\varphi\left(R,z\right)dz\,,\ U=-\int_0^L E_z\left(R,z\right)dz\,,\ Z=U/I\,.$$

При этом предполагалось, что ток определяется усредненным по высоте значением магнитного поля.

Во-вторых, на границе 6 расчетной области, формулы для импеданса в данном случае получим:

$$I=2\pi R_1 H_\varphi\left(R_1,\pm L+L_2\right)=2\pi R_2 H_\varphi\left(R_2,\pm L+L_2\right),\ U=\int_{R_1}^{R_2} E_r\left(r,\pm(L+L_2)\right)dr\,,\ Z=U/I$$

Импеданс рассчитывался в нескольких точках – на границе разряда (1, $r=R$, рис. 5), а также в подводящей к разрядной камере линии на расстоянии L_2=1 см (2, рис. 6) и L_2=10 см (3, в статье не приводятся) от разрядной камеры. Распределение плотности электронов в плазме при расчетах было однородно, а диэлектрическая проницаемость была задана в модели холодной плазмы. Со стороны внешней стенки ограничен диэлектриком с ε=1.

Расчет проводился для симметричного (рис. 5 – 8) и антисимметричного (ток генераторов течет на боковую стенку) возбуждения разряда (рис. 9 –10).

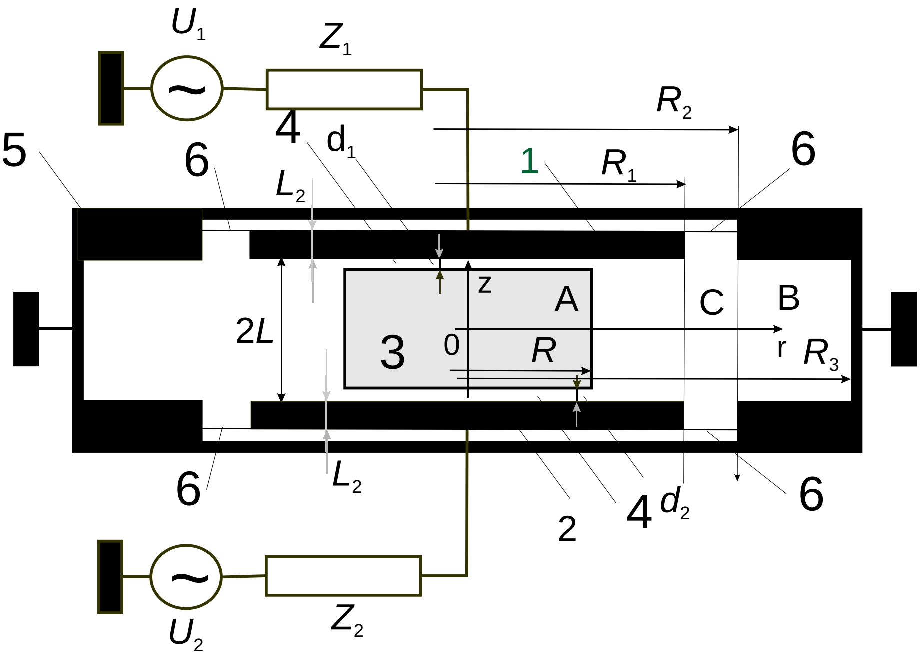


Рис. 4. Типичная схема экспериментальной установки 1, 2 – электроды, 3 – плазма, 4 – слои пространственного заряда между плазмой и стенкой (электродами), 5 – разрядная камера, 6 – граница расчетной области, через которую идет возбуждение электромагнитного поля. $2L$ – межэлектродное расстояние, d_1, d_2 – толщины слоев пространственного заряда.

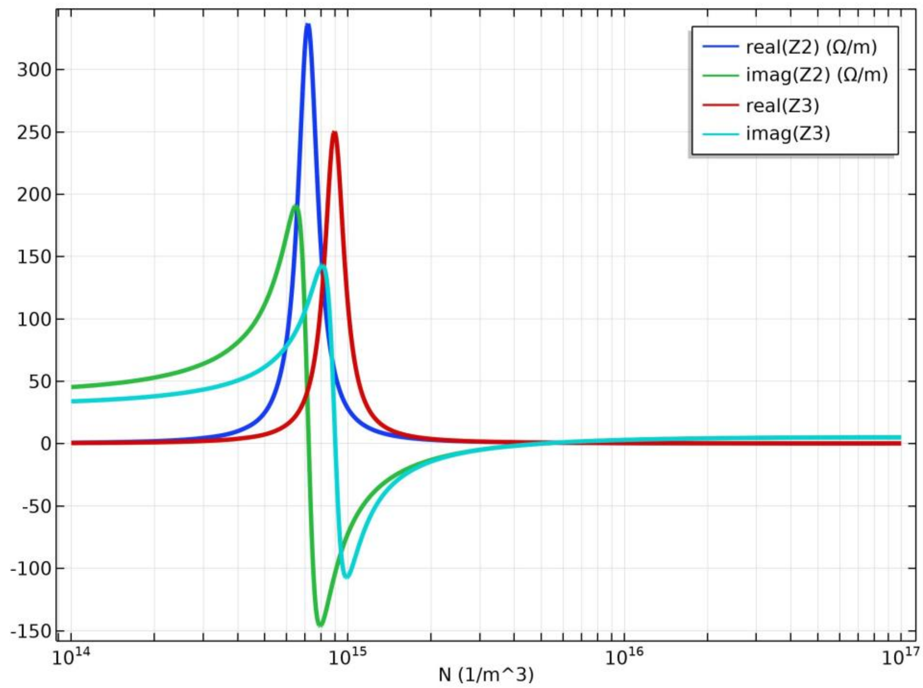


Рис. 5. Пример расчета импеданса разряда как функции плотности электронов. Z2 – импеданс на границе электрода в плоскости z=L, Z3 - импеданс в точке подвода ВЧ поля к линии передачи. Геометрия разряда соответствует распределению поляниже.

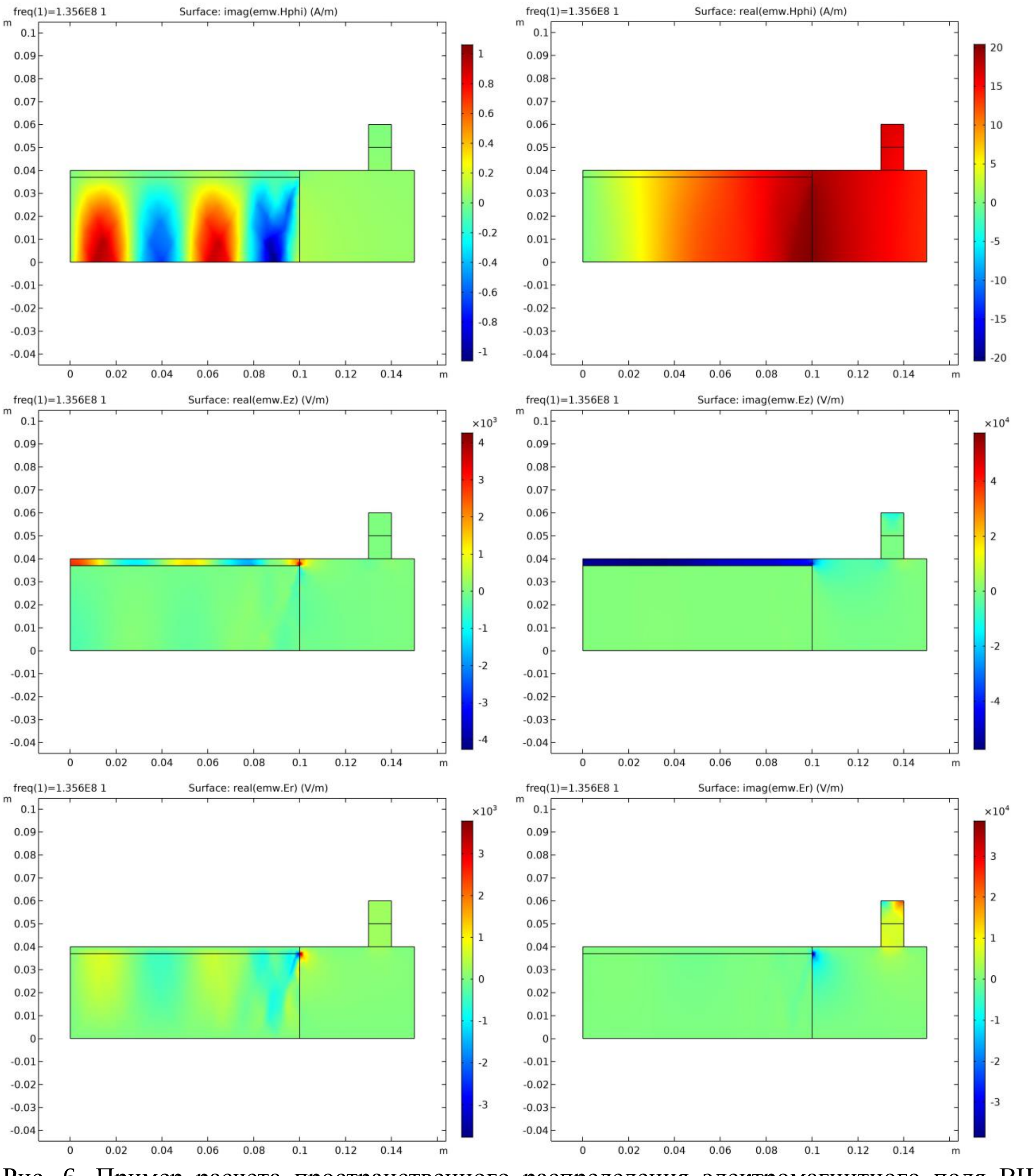


Рис. 6. Пример расчета пространственного распределения электромагнитного поля ВЧ волны в разрядной камере, частота волны 137.6 МГц. Плотность электронов $2{\cdot}10^{10}$ см$^{-3}$, циклотронная частота 500 МГц, постоянное магнитное поле направлено вдоль оси 0Z, отношение частоты столкновений электронов к частоте поля – 0.1.

Расчет показывает, что при синфазном возбуждении зависимость кривых импеданса разряда от плотности электронов напоминает соответствующие кривые в разряде без магнитного поля, есть области емкостного и индуктивного импеданса , что связано с тем, что ток протекает через слои пространственного заряда с емкостным импедансом, а также через плазму, причем ток течет вдоль магнитного поля. При этом полный ток в плазме направлен в сторону противоположную току в слоях, так как ε_{zz} отрицательно. Поэтому падение напряжение на плазме имеет обратный знак по сравнению с напряжением на слое.

В зависимости от того, какое напряжение больше, разряд в целом имеет индуктивный ReZ<0 или емкостной ReZ>0 импеданс/

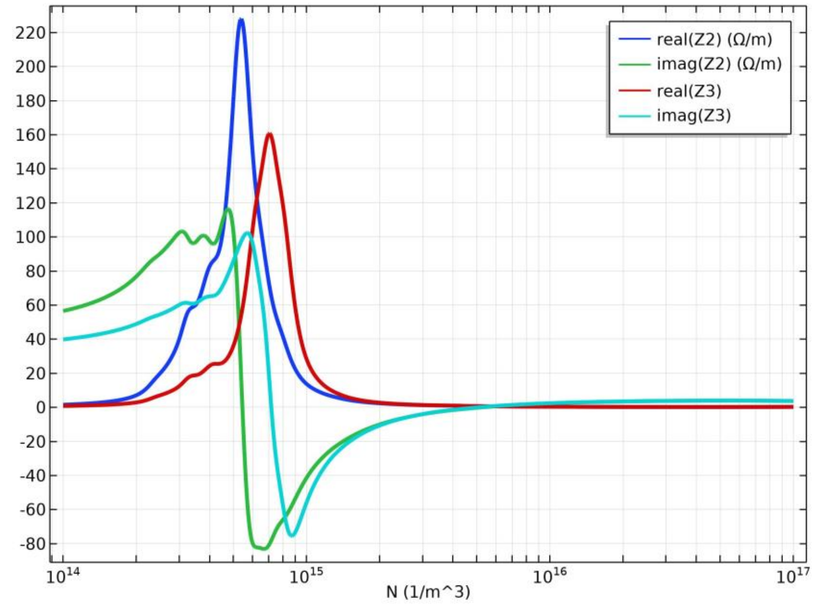
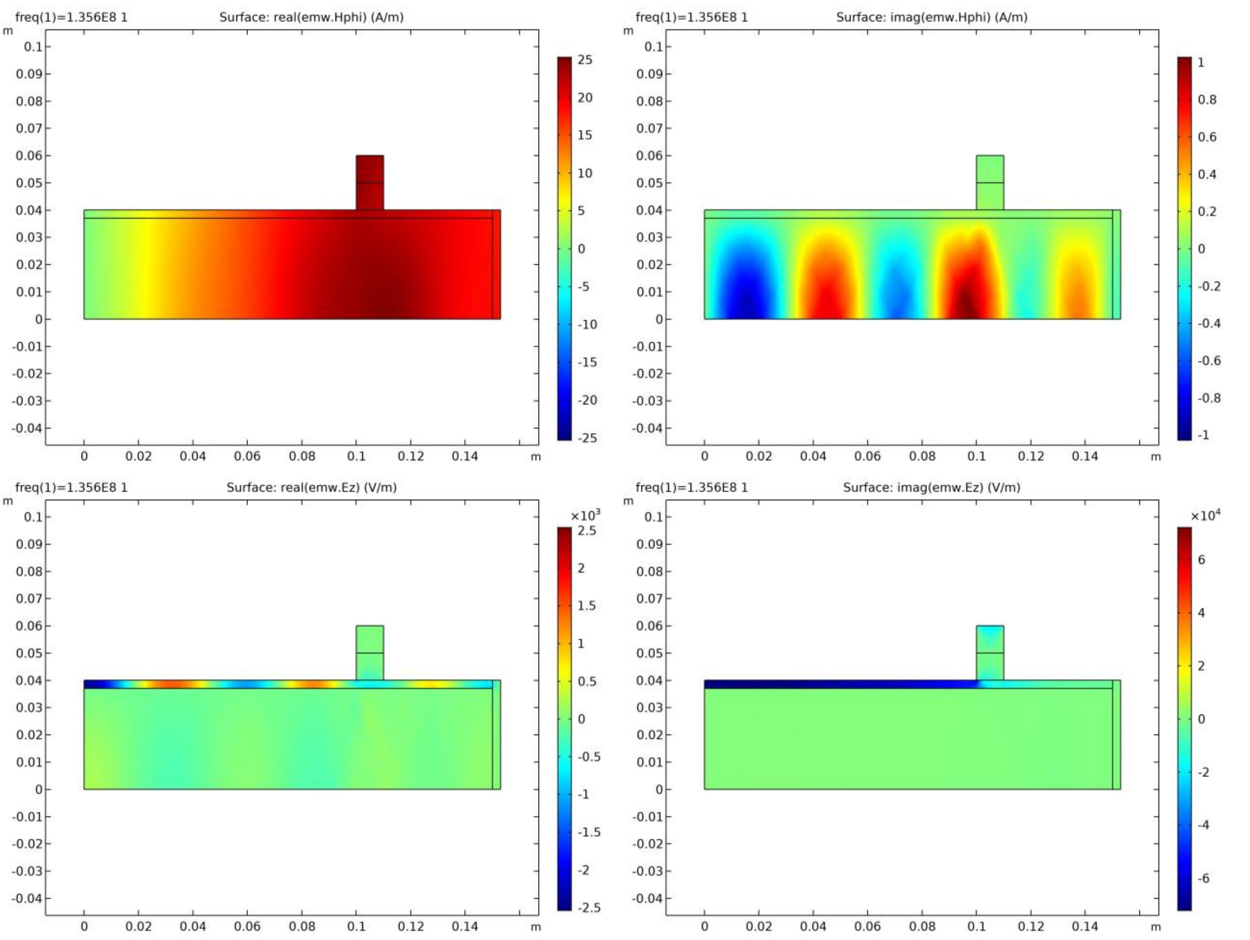


Рис. 7. Пример расчета импеданса разряда как функции плотности электронов. Z2 – импеданс на границе электрода в плоскости z=L, Z3 - импеданс в точке подвода ВЧ поля к линии передачи. Геометрия разряда соответствует распределению поля ниже.



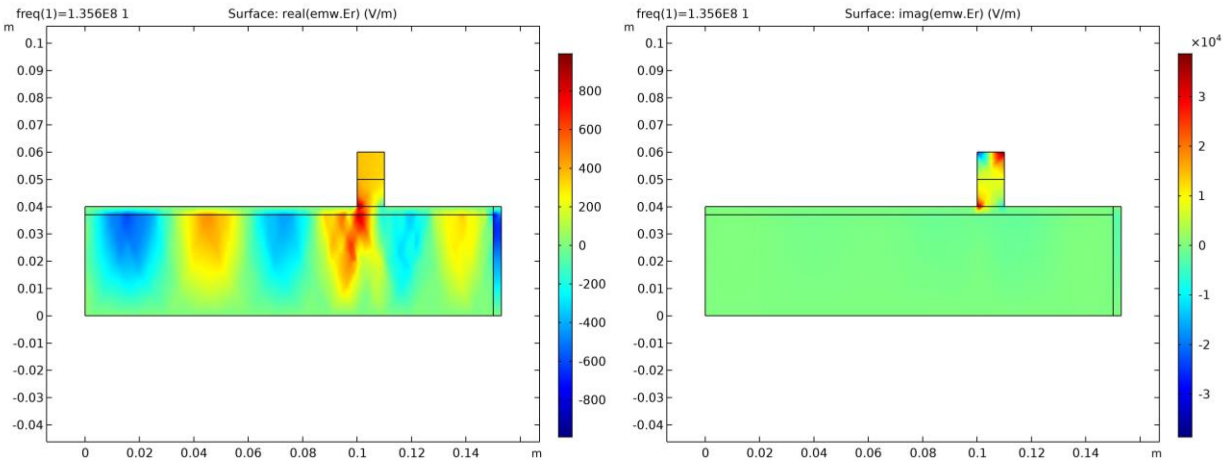


Рис. 8. Пример расчета пространственного распределения электромагнитного поля ВЧ волны в разрядной камере, частота волны 137.6 МГц. Плотность электронов $2{\cdot}10^{10}$ см$^{-3}$, циклотронная частота 500 МГц, постоянное магнитное поле направлено вдоль оси 0Z, отношение частоты столкновений электронов к частоте поля – 0.1.

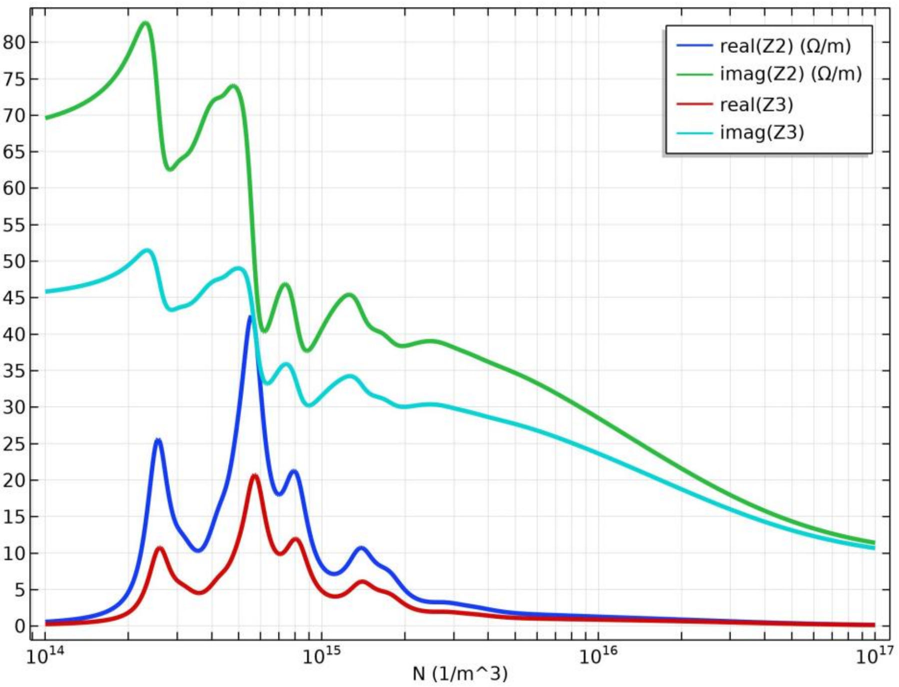


Рис. 9. Пример расчета импеданса разряда как функции плотности электронов. Z2 – импеданс на границе электрода в плоскости z=L, Z3 - импеданс в точке подвода ВЧ поля к линии передачи. Геометрия разряда соответствует распределению поляниже.

При антисимметричном возбуждении ток течет поперек магнитного поля. При выбранных расчетных параметрах «эффективная» диэлектрическая проницаемость оказывается больше нуля, поэтому направления токов в плазме и в слоях пространственного заряда совпадают, и импеданс плазмы во всех случаях остается емкостным.

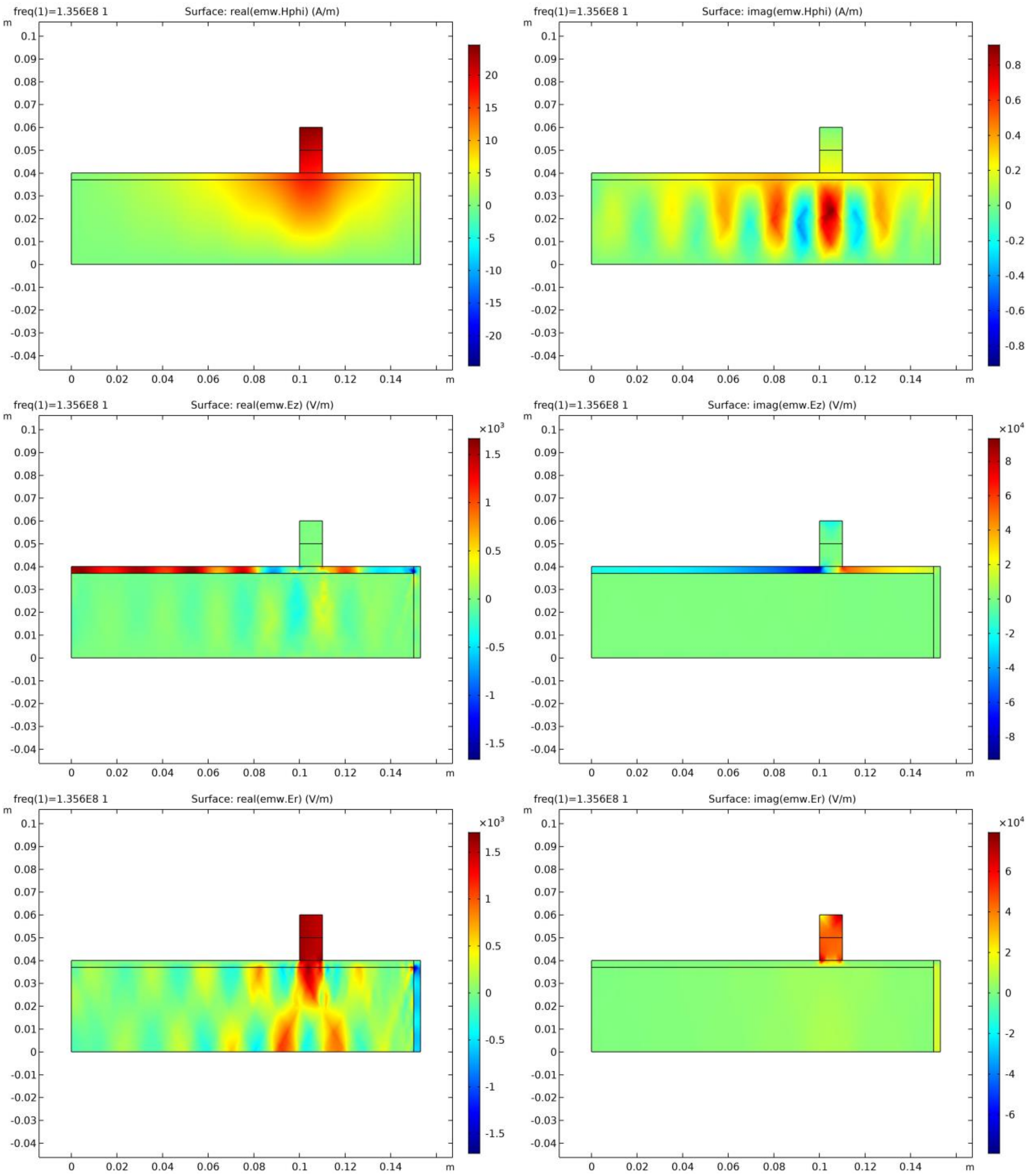


Рис. 10. Пример расчета пространственного распределения электромагнитного поля ВЧ волны в разрядной камере, частота волны 137.6 МГц. Плотность электронов $2{\cdot}10^{10}$ см$^{-3}$, циклотронная частота 500 МГц, постоянное магнитное поле направлено вдоль оси 0Z, отношение частоты столкновений электронов к частоте поля – 0.1. Антисимметричное возбуждение поля.

Расчеты показывают также, что ход кривых импеданса от плотности электронов имеет немонотонный характер, поэтому можно предположить, что в плазме возбуждаются также стоячие электромагнитные волны с длиной, сравнимой с размерами системы. Это предположение подтверждается расчетами структуры поля в разряде (рис. 6, 8, 10)

5. Выводы

В данной работе рассмотрена задача о расчете пространственных распределений электромагнитного поля в магнитоактивной плазме. Это задача весьма актуальна в данный момент в связи с необходимостью развития плазменных технологий. В результате выполнения работы

1. Выписаны уравнения определяющие пространственное распределение для электромагнитного поля в магнитоактивной плазме.
2. Проведен расчет дисперсионных кривых волн в магнитоактивной плазме при различных условиях.
3. Проведен расчет возможных неоднородных в пространстве распределений электромагнитного поля.
4. Проведен предварительный расчет импеданса разряди и пространственного распределения электромагнитного поля для модельной геометрии.

Проведенные расчеты могут быть основой для анализа в дальнейшем вольтамперных характеристик и пространственных распределений поля в различных типах разряда в магнитном поле.

Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителю за предложенную интересную тему, позволившую познакомиться с основами электродинамики вообще и электродинамики плазмы в частности. Автор также благодарен руководителю за возможность познакомиться с основами работы в Matlab и COMSOL Multiphysics®.

Автор также благодарен тем членам комиссии по приему дипломных работ, которые прочитали его работу и посмотрели презентацию.

Приложение I. Расчет векторных полей по их вихрю и дивергенции.

В соответствии с общими теоремами любое векторное поле есть сумма потенциального и вихревого полей $\mathbf{V}=\left[\nabla\times\mathbf{\Psi}\right]+\left(\nabla\psi\right)=i\left[\mathbf{k}\times\mathbf{\Psi}\right]+i\mathbf{k}\psi$. Для того, чтобы найти эти компоненты поля, нужно знать его вихрь и дивергенцию. Если известно, что $\left[\nabla\times\mathbf{V}\right]=\mathbf{\Omega}$, и $\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right)=i\omega\,\delta n_e/n_0$, то:

$$\nabla^2\mathbf{\Psi}=-\mathbf{\Omega}\,,\ \nabla^2\psi=i\omega\,\delta n_e/n_0$$

При записи уравнений мы ввели соотношение $\left(\nabla\cdot\mathbf{\Psi}\right)=0$. Аналогичное условие накладывается на вектор-потенциал электромагнитного поля $\mathbf{A}$ в электродинамике [20]. Введем новые переменные $\mathbf{\Omega}=\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}\right]$, $\delta n_e=n_0\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}\right)/\omega$ и получим для них нужные уравнения

$$\mathbf{\Psi}=-\frac{\mathbf{\Omega}}{k^2}\,,\ \psi=-\frac{i\omega}{k^2}\frac{\delta n_e}{n_0}$$

Из этих уравнений следует

$$\mathbf{V}=\left[\nabla\times\mathbf{\Psi}\right]+\left(\nabla\psi\right)=i\frac{\left[\mathbf{k}\times\mathbf{\Omega}\right]}{k^2}+\frac{\omega\mathbf{k}}{k^2}\frac{\delta n_e}{n_0}$$

Запишем это же соотношение в координатах

$$\mathbf{V} = i\frac{\left[\mathbf{k}\times\mathbf{\Omega}\right]}{k^2} + \frac{\omega\mathbf{k}}{k^2}\frac{\delta n_e}{n_0} = \frac{i}{k^2}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0\\ k_x & k_y & k_z\\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z\end{bmatrix} + \frac{\omega}{k^2}\frac{\delta n_e}{n_0}\mathbf{k} =$$

$$= \mathbf{x}_0\left(k_y\Omega_z - k_z\Omega_y\right) + \mathbf{y}_0\left(k_z\Omega_x - k_x\Omega_z\right) + \mathbf{z}_0\left(k_x\Omega_z - k_y\Omega_x\right) + \frac{\omega}{k^2}\frac{\delta n_e}{n_0}\left(\mathbf{x}_0 k_x + \mathbf{y}_0 k_y + \mathbf{z}_0 k_z\right)$$

Приложение II. Движение электрона в постоянном магнитном поле и в скрещенных электрическом и магнитном полях

Рассмотрим движение электрона в постоянных электрическом и магнитном полях без учета столкновений. Запишем уравнения движения для электрона

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_0 - \frac{e}{mc}\left[\mathbf{V}\times\mathbf{H}_0\right],\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}. \qquad (\text{П}2.1)$$

Будем считать, что магнитное поле направлено вдоль оси 0Z, а электрическое поле имеет две компоненты E_x и E_z. В компонентах (П2.1) можно записать как

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{e}{m}E_x - \frac{e}{mc}V_y H_0,\ \frac{dV_y}{dt} = \frac{e}{mc}V_x H_0\ ,\ \frac{dV_z}{dt} = -\frac{e}{m}E_z \qquad (\text{П}2.2)$$

Дифференциальные уравнения нужно дополнить начальными условиями

$$\mathbf{V}(0) = \left(V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}\right),\ \mathbf{R}(0) = \left(R_{x0}, R_{y0}, R_{z0}\right).$$

Третье уравнение решается очень просто

$$V_z = V_0 - \frac{e}{m}E_z t\ ,\ Z(t) = V_{0z}t - \frac{e}{2m}E_z t^2.$$

Для того, чтобы решить первые два уравнения, продифференцируем второе уравнение по t и подставим в первое

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{e}{m}E_x - \frac{e}{mc}V_y H_0,\ \frac{d^2V_y}{d^2t} + \left(\frac{eH_0}{mc}\right)^2 V_y = \left(\frac{eH_0}{mc}\right)\frac{e}{m}E_x. \qquad (\text{П}2.3)$$

Мы получили линейное уравнение. Общее решение линейного уравнения есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения в данном случае есть очень простое – движение с постоянной скоростью:

$$V_y = \frac{e}{m}E_x\bigg/\left(\frac{eH_0}{mc}\right)$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2V_y}{d^2t} + \left(\frac{eH_0}{mc}\right)^2 V_y = 0\ ,\ V_y = V_S\sin\left(\frac{eH_0}{mc}t\right) + V_C\cos\left(\frac{eH_0}{mc}t\right),.$$

Далее мы для простоты введем обозначение $\Omega_0 = eH_0/mc$ Таким образом

$$V_y = \frac{eE_x}{m\Omega_0} + V_S\sin\left(\Omega_0 t\right) + V_C\cos\left(\Omega_0 t\right),\ V_x = \frac{1}{\Omega_0}\frac{dV_y}{dt} = V_S\cos\left(\Omega_0 t\right) - V_C\sin\left(\Omega_0 t\right)$$

Учитывая начальные условия, получим

$$V_y = \frac{eE_x}{m\Omega_0} + V_{x0}\sin\left(\Omega_0 t\right) + \left(V_{y0} - \frac{eE_x}{m\Omega_0}\right)\cos\left(\Omega_0 t\right),$$

$$V_x = \frac{1}{\Omega_0}\frac{dV_y}{dt} = V_S\cos\left(\Omega_0 t\right) - \left(V_{y0} - \frac{eE_x}{m\Omega_0}\right)\sin\left(\Omega_0 t\right)$$

Таким образом в скрещенных магнитном и электрическом полях электрон движется с постоянной скоростью в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям и вращается в плоскости, перпендикулярной постоянному магнитному поля, с циклотронной частотой.

Приложение Ш. Детали расчета токов в плазме и диэлектрической проницаемости с учетом давления электронного газа

Для решения уравнений (4) запишем их в компонентах

$$-i\omega\mathbf{V}_x = -iC_S^2\frac{k_x\left(k_x\mathbf{V}_x + k_y\mathbf{V}_y + k_z\mathbf{V}_z\right)}{\omega} - \frac{e}{m}\mathbf{E}_x - \frac{e}{mc}\mathbf{V}_y\mathbf{B} - \nu_{en}\mathbf{V}_x,$$

$$-i\omega\mathbf{V}_y = -iC_S^2\frac{k_y\left(k_x\mathbf{V}_x + k_y\mathbf{V}_y + k_z\mathbf{V}_z\right)}{\omega} - \frac{e}{m}\mathbf{E}_y + \frac{1}{c}\frac{e\mathbf{B}}{m}\mathbf{V}_x - \nu_{en}\mathbf{V}_\mathbf{e},$$

$$-i\omega\mathbf{V}_z = -iC_S^2\frac{k_z\left(k_x\mathbf{V}_x + k_y\mathbf{V}_y + k_z\mathbf{V}_z\right)}{\omega} - \frac{e}{m}\mathbf{E}_z - \nu_{en}\mathbf{V}_\mathbf{e},$$

Теперь

$$\left(-i\omega + \nu_{en} + iC_S^2\frac{k_xk_x}{\omega}\right)\mathbf{V}_x + \left(iC_S^2\frac{k_xk_y}{\omega} + \frac{e\mathbf{B}}{mc}\right)\mathbf{V}_y - iC_S^2\frac{k_xk_z}{\omega}\mathbf{V}_z = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_x,$$

$$\left(-\frac{1}{c}\frac{e\mathbf{B}}{m} + iC_S^2\frac{k_yk_x}{\omega}\right)\mathbf{V}_x - \left(i\omega + \nu_{en} + iC_S^2\frac{k_yk_y}{\omega}\right)\mathbf{V}_y + iC_S^2\frac{k_yk_z}{\omega}\mathbf{V}_z = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_y,$$

$$iC_S^2\frac{k_zk_x}{\omega}\mathbf{V}_x + iC_S^2\frac{k_zk_y}{\omega}\mathbf{V}_y + \left(-i\omega + \nu_{en} + iC_S^2\frac{k_zk_z}{\omega}\right)\mathbf{V}_z = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_z,$$

Далее для сокращения записи будем использовать циклотронную частоту вместо $\Omega_0 = e\mathbf{B}/mc$

$$\left(-i\omega + \nu_{en} + iC_S^2\frac{k_xk_x}{\omega}\right)\mathbf{V}_x + \left(iC_S^2\frac{k_xk_y}{\omega} + \Omega_0\right)\mathbf{V}_y - iC_S^2\frac{k_xk_z}{\omega}\mathbf{V}_z = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_x,$$

$$\left(-\Omega_0 + iC_S^2\frac{k_yk_x}{\omega}\right)\mathbf{V}_x - \left(i\omega + \nu_{en} + iC_S^2\frac{k_yk_y}{\omega}\right)\mathbf{V}_y + iC_S^2\frac{k_yk_z}{\omega}\mathbf{V}_z = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_y,$$

$$iC_S^2\frac{k_zk_x}{\omega}\mathbf{V}_x + iC_S^2\frac{k_zk_y}{\omega}\mathbf{V}_y + \left(-i\omega + \nu_{en} + iC_S^2\frac{k_zk_z}{\omega}\right)\mathbf{V}_z = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_z,$$

Приложение IV. Расчет дисперсии волн в магнитном поле

Исходим из уравнения (9).

$$i\omega\left(1 - \frac{c^2\mathbf{k}^2}{\omega^2}\right)\left(\left(-i\omega + \nu_{en}\right)\mathbf{V}_e + i\mathbf{k}C_S^2\frac{\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_\mathbf{e}\right)}{\omega} + \left[\mathbf{V}_\mathbf{e}\times\mathbf{\Omega}_0\right]\right) - \omega_{Pe}^2\left(\mathbf{V}_e - \frac{c^2\mathbf{k}}{\omega^2}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_e\right)\right) = 0$$

Для решения уравнения умножим, как и в случае уравнения для электрического поля, наше уравнение скалярно на **k**.

$$\left(\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\mathbf{k}^2C_S^2-\omega_{Pe}^2\right)\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V_e}\right)+i\omega\left(\mathbf{k}\left[\mathbf{V_e}\times\mathbf{\Omega}_0\right]\right)\right)=0$$

Мы можем использовать циклическую перестановку $\left(\mathbf{k}\left[\mathbf{V_e}\times\mathbf{\Omega}_0\right]\right)=\left(\mathbf{\Omega}_0\left[\mathbf{k}\times\mathbf{V_e}\right]\right)=\left(\mathbf{V_e}\left[\mathbf{\Omega}_0\times\mathbf{k}\right]\right)$. Нам удобно использовать второе соотношение вместо первого

$$\left(\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\mathbf{k}^2C_S^2-\omega_{Pe}^2\right)\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V_e}\right)+i\omega\left(\mathbf{\Omega}_0\left[\mathbf{k}\times\mathbf{V_e}\right]\right)\right)=0 \qquad (\text{П}4.1)$$

Таким образом, мы видим, что продольный ток и поперечный ток связаны друг с другом. Однако связь есть не непосредственно с поперечными колебаниями, а с их компонентой, вихрь которой направлен вдоль магнитного поля. Используем третью формулу

$$\left(\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\mathbf{k}^2C_S^2-\omega_{Pe}^2\right)\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V_e}\right)+i\omega\left(\mathbf{V_e}\left[\mathbf{\Omega}_0\times\mathbf{k}\right]\right)\right)=0$$

Далее мы можем умножить наше исходное уравнение векторно на **k**:

$$i\omega\left(1-\frac{c^2\mathbf{k}^2}{\omega^2}\right)\left\{\left(-i\omega+\nu_{en}\right)\left[\mathbf{k}\times\mathbf{V}_e\right]+\left[\mathbf{k}\times\left[\mathbf{V}_e\times\mathbf{\Omega}_0\right]\right]\right\}-\omega_{Pe}^2\left[\mathbf{k}\times\mathbf{V}_e\right]=0$$

Здесь тоже нужно применить формулу $\left[\mathbf{a}\times\left[\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right]\right]=\mathbf{b}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\right)-\mathbf{c}\left(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\right)$

$$i\omega\left(1-\frac{c^2\mathbf{k}^2}{\omega^2}\right)\left\{\left(-i\omega+\nu_{en}\right)\left[\mathbf{k}\times\mathbf{V}_e\right]+\mathbf{V}_e\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Omega}_0\right)-\mathbf{\Omega}_0\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}\right)\right\}-\omega_{Pe}^2\left[\mathbf{k}\times\mathbf{V}_e\right]=0$$

Таким образом мы получаем еще одно уравнение, связывающее продольную и поперечную компоненты скоростей

$$i\omega\left(1-\frac{c^2\mathbf{k}^2}{\omega^2}\right)\left\{\left(-i\omega+\nu_{en}\right)\left[\mathbf{k}\times\mathbf{V}_e\right]+\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Omega}_0\right)\frac{\left[\mathbf{k}\times\left[\mathbf{k}\times\mathbf{V}_e\right]\right]}{\mathbf{k}^2}-\left(\mathbf{\Omega}_0-\frac{\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Omega}_0\right)}{\mathbf{k}^2}\right)\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_e\right)\right\}-\omega_{Pe}^2\left[\mathbf{k}\times\mathbf{V}_e\right]=0$$

Наконец получаем итоговое выражение:

$$\left\{\left(-i\omega+\nu_{en}\right)+\frac{i\omega\omega_{Pe}^2}{\left(\omega^2-c^2\mathbf{k}^2\right)}\right\}\mathbf{\Omega}+\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Omega}_0\right)\frac{\left[\mathbf{k}\times\mathbf{\Omega}\right]}{\mathbf{k}^2}+\left(\mathbf{\Omega}_0-\frac{\mathbf{k}\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{\Omega}_0\right)}{\mathbf{k}^2}\right)\frac{i\omega\left(\mathbf{\Omega}_0\mathbf{\Omega}\right)}{\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\mathbf{k}^2C_S^2-\omega_{Pe}^2\right)}=0$$

(П4.2)

Будем считать, что магнитное поле направлено вдоль оси 0Z, а волновой вектор имеет все три компоненты $\mathbf{k}=\left(k_x,0,k_z\right)$. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left\{\left\{\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\frac{\omega\omega_{Pe}^2}{\left(\omega^2-c^2\mathbf{k}^2\right)}\right\}-\frac{k_x^2}{\mathbf{k}^2}\frac{\omega\mathbf{\Omega}_0^2}{\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\mathbf{k}^2C_S^2-\omega_{Pe}^2\right)}\right\}\left\{\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\frac{\omega\omega_{Pe}^2}{\left(\omega^2-c^2\mathbf{k}^2\right)}\right\}-$$
$$-\frac{k_z^2\mathbf{\Omega}_0^2}{\mathbf{k}^2}=0.$$

Если положить $\mathbf{k}=\left(k\sin\theta,0,k\cos\theta\right)$, получим

$$\left\{\left\{\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\frac{\omega\omega_{Pe}^2}{\left(\omega^2-c^2\mathbf{k}^2\right)}\right\}-\frac{\omega\mathbf{\Omega}_0^2\sin^2\theta}{\left(\omega\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\mathbf{k}^2C_S^2-\omega_{Pe}^2\right)}\right\}\left\{\left(\omega+i\nu_{en}\right)-\frac{\omega\omega_{Pe}^2}{\left(\omega^2-c^2\mathbf{k}^2\right)}\right\}+$$
$$+\mathbf{\Omega}_0^2\cos^2\theta=0$$

Список литературы

1 Кралькина Е.А. УФН, 178 519 (2008).
2 Thomson J.J. *Philos. Mag.* **32** 321 (1891).
3 Hittorf W. *Ann. Phys. Chem.* **21** 90 (1884).
4 Townsend J. S., Donaldson R. H. *Philos. Mag.* ***5*** 178 (1928).
5 Townsend J. S., Donaldson R. H. *Philos. Mag.* **7** 600 (1929).
6 MacKinnon К. A. *Philos. Mag.* **8** 605 (1929).
7 Hopwood J. *Plasma Sources Sci. Technol.* **1** 109 (1992).
8 Loeb H. W. "Recent work on radio frequency ion thrusters" *J. Spacecraft Rockets* **8** 494 (1971).
9 Godyak V. A., Alexandrovich B M, Piejak R B, US Patent 5,834,905 (November 19, 1998).
10 Stevens J. E. "Electron cyclotron resonance plasma sources", in *High Density Plasma Sources'. Design, Physics, and Phenomena* (Ed. O A Popov) (Park Ridde, NJ' Noyes Publ., 1995) p. 312
11 Boswell R. W., US Patent 4,810,935 (March 7, 1989).
12 Chen F. F., "Helicon plasma sources", in *High Density Plasma Sources' Design, Physics, and Phenomena* (Ed. O A Popov) (Park Ridde, NJ' Noyes Publ., 1995) p. 1.
13 Александров А.Ф. и др. *ЖТФ* **64** (11) 53 (1994) [Aleksandrov A F et al. *Tech Phys.* **39** 1118 (1994)].
14 Александров А.Ф. и др., Патент РФ 2095877.
15 Силин В. П., Рухадзе А. А. *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (М.: Госатомиздат, 1961).
16 Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. *Волны в магнитоактивной плазме* (М.: Наука, 1970).
17 Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. *Основы электродинамики плазмы* (М.: Высшая школа, 1978) [Translated into English: Aleksandrov A. F., Bogdankevich L. S., Rukhadze A. A. *Principles of Plasma Electrodynamics* (Berlin' SpringerVerlag, 1984)].
18 Ахиезер А.И. и др. Электродинамика плазмы. М. Наука 1974.
19 Sazontov V.A., Semenov V.E., and Smirnov A. I. // Plasma Physics Reports, 2007, Vol. 33, No. 11, pp. 961–968.
20. Борн М.. Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука 1973.